PAOLO ZELLINI

LA MATEMÁTICA DE LOS DIOSES Y LOS ALGORITMOS DE LOS HOMBRES

SIRUELA BIBLIOTECA DE ENSAYO

Paolo Zellini

La matemática de los dioses y los algoritmos de los hombres

Traducción del italiano
de Mercedes Corral

Siruela

Biblioteca de Ensayo 101 (Serie Mayor)

Edición en formato digital: enero de 2019

Título original: *La matematica degli dèi e gli algoritmi degli uomini*
En cubierta: fotografía de Panther Media GmbH / Alamy Stock Photo
Diseño gráfico: Ediciones Siruela
© Paolo Zellini, 2016
© De la traducción, Mercedes Corral
© Ediciones Siruela, S. A., 2018

Todos los derechos reservados. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, *www.cedro.org*) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Ediciones Siruela, S. A.
c/ Almagro 25, ppal. dcha.
www.siruela.com

ISBN: 978-84-17624-60-6

Conversión a formato digital: María Belloso

Índice

Introducción

1. Abstracción, existencia y realidad

2. La matemática de los dioses

3. Fórmulas matemáticas y fórmulas filosóficas

4. Aumento y disminución. Número y *phýsis*

5. *Katà gnómonos phýsin*

6. *Dýnamis*. La capacidad de producir

7. Intermedio. La mecánica espiritual

8. Las paradojas de Zenón. La explicación del movimiento

9. Las paradojas de la pluralidad

10. Límite e ilimitado. Inconmensurabilidad y algoritmos

11. Realidad de los números. Las secuencias fundamentales de Cantor

12. Realidad de los números. Las secciones de Dedekind

13. ¿La matemática es descubrimiento o invención?

14. Del continuo al digital

15. Crecimiento de los números

16. Crecimiento de las matrices

17. Crisis de los fundamentosy crecimiento de la complejidad

18. *Verum et factum*

19. Recursión e invariancia

Introducción

¿De qué realidad nos habla la matemática? Muchos consideran que los matemáticos se ocupan de formalismos abstractos, y que solo por razones inexplicables dichos formalismos se aplican en todos los ámbitos de la ciencia. Concebimos entidades intangibles que parecen destinadas a definir modelos de fenómenos que suceden realmente en el mundo. Por un lado, las cosas reales, actuales; por otro, los conceptos matemáticos, creaciones de nuestra mente, que simulan el comportamiento de las primeras de una forma más o menos eficaz. El desconocimiento de los verdaderos motivos del poder descriptivo de las fórmulas y ecuaciones no ayuda ciertamente a aclarar las motivaciones del pensamiento matemático. Si acaso, acaba por corroborar la idea de que los matemáticos no son propensos a ocuparse del mundo. La matemática continúa así presentándose como una ciencia que elabora ingeniosas operaciones con normas y conceptos que parecen inventados con el único fin de realizarlas correctamente.[1] No importa que algunas ideas vengan sugeridas por la observación de los fenómenos naturales; las operaciones producen rápidamente conceptos avanzados y complejos que difieren de la realidad observable, y que convalidan finalmente la imagen distorsionada de una matemática como puro juego lingüístico o como vacío formalismo.

Sin embargo, si nos remontamos a la historia más remota y a las más profundas motivaciones de la matemática, vemos que esta tenía una orientación diferente a lo que comúnmente se cree. Las fuentes nos muestran que la aritmética y la geometría antiguas empezaban a asumir la tarea no tanto de describir o simular las cosas reales como de ofrecer una base de la misma realidad del mundo de la que estas formaban parte. Los

entes concretos, los más perceptibles de una forma directa e inmediata, eran los cambiantes y volátiles, los que parecían, por tanto, irreales. En los números, en las relaciones y en las figuras de la geometría había que encontrar, en cambio, lo que los sustraía de la inestabilidad y de la evanescencia.

Si pensamos en las célebres paradojas de Zenón, en los números-puntos de los pitagóricos y de los atomistas antiguos, en la filosofía matemática de Platón, en el descubrimiento de la inconmensurabilidad y en el significado del concepto de relación (*lógos*), en los cálculos babilónicos y en la matemática védica, nos encontramos ante una grandiosa estructura de conocimientos tendentes a captar la parte más interior e invisible, y al mismo tiempo más real, de los entes que existen en la naturaleza. Pero esta orientación no pertenece solo a la matemática antigua. La teoría de los números y del continuo aritmético elaborada en el siglo XIX se propuso como una continuación ideal del antiguo pitagorismo y de su visión del mundo inspirada en un principio de realidad atomista. Los matemáticos de entonces seguían sosteniendo que sus construcciones simbólicas correspondían a entes muy reales, y la sensación más difundida era que del éxito de sus teorías dependían los cimientos necesarios para comprender el mundo. Cuando, a principios del siglo XX, aquellas teorías se volvieron inciertas y empezaron a sufrir una revisión crítica, la matemática tuvo que buscar las razones por las que un sistema de cálculo es verdaderamente concreto y fiable.

Comenzó entonces a circular insistentemente entre los matemáticos un término clave, el de *algoritmo*, que denotaba no tanto una fórmula abstracta como un proceso efectivo.[2] Este proceso debía desarrollarse en un número finito de pasos, desde un conjunto de datos iniciales hasta un resultado final, en el espacio y el tiempo, según las modalidades previstas por una máquina. Las definiciones formales de algoritmo, basadas en la recursión, en la máquina de Turing o en otros formalismos, se remontan a los años treinta del siglo pasado, pero los primeros indicadores de que sería el concepto de algoritmo el que heredaría el sentido de la realidad matemática, es decir, de todo lo que los matemáticos perciben como real y efectivo, se

registran ya en la primera década del siglo XX en los pródromos del intuicionismo matemático y en las primeras argumentaciones con las que Émile Borel afrontaba las paradojas semánticas y la incipiente crisis de los cimientos.

La ciencia de los algoritmos tuvo un desarrollo turbulento durante todo el siglo XX y alcanzó un punto culminante en las definiciones formales de los años treinta, para después dividirse, a raíz de la construcción de los primeros ordenadores, en dos filones complementarios y relativamente contrapuestos: por un lado, la informática teórica, con una teoría abstracta de la computabilidad y de la complejidad computacional; por otro, una ciencia del cálculo a gran escala, destinada a resolver problemas de la física matemática, de la economía, de la ingeniería o de la informática en términos puramente aritméticos y numéricos. Las múltiples dimensiones filosóficas de este segundo filón no han sido todavía suficientemente aclaradas, pero ya es evidente, para la sensibilidad de cualquiera, lo mucho que ha afectado, en todos los sectores de la vida, de la cultura y del orden social, la multiplicación de una variedad diversificada de procesos de cálculo dirigidos a resolver problemas específicos de muy distinta índole.

En el cálculo numérico a gran escala, la *efectividad* teórica de los algoritmos aspira a ser *eficiencia* computacional. Y hoy ya parece claro que, para ser *reales*, los mismos entes matemáticos construidos con un proceso de cálculo deben poder pensarse del mismo modo que los algoritmos eficientes. Sin embargo, la eficiencia depende sobre todo de la forma en la que aumentan la complejidad computacional y el error en los cálculos. El error, concretamente, depende de *la velocidad con la que crecen* los números durante el cálculo.

Los motivos del crecimiento de los números son estrictamente matemáticos y se explican gracias a teoremas relativamente avanzados. Pero no es superfluo observar que el motivo del crecimiento, en todas sus dimensiones, fue objeto de una gran atención ya en el pensamiento antiguo, y es precisamente la forma en la que el crecimiento de las magnitudes es tratado en la geometría griega, en los cálculos médicos y en la aritmética mesopotámica lo que lleva a comprender las causas del crecimiento de los

números en los algoritmos modernos. La razón es tan simple como sorprendente: algunos importantes *esquemas computacionales* han permanecido invariables desde entonces, incluso en las más complejas estrategias de las que se vale hoy el cálculo a gran escala.

¿De dónde proceden esos esquemas? En algunos casos, de especial relieve para la ciencia moderna, las fuentes hablan claro: esos esquemas proceden de una singular combinación de planificación humana y dictamen divino. En la India védica, los altares del dios Agni tenían complejas formas geométricas y debían poder ser aumentados cien veces, con técnicas específicas que se encuentran también en la geometría griega y en el cálculo mesopotámico, sin cambiar de forma. En Grecia no era raro, como en el caso de la duplicación del cubo, que el aumento de una figura fuera determinado por un dios. Pero el crecimiento de la figura geométrica estaba estrechamente relacionado con los algoritmos destinados a aproximar aquellos números que, debiendo medir tamaños geométricos como la diagonal de un cuadrado de lado unitario, o bien la relación entre una circunferencia y su diámetro, resultan irracionales. Fueron los dioses védicos y los griegos, mucho antes que el dios de Descartes, los que aseguraron la existencia de un nexo entre las concepciones del místico y de la naturaleza, entre nuestra esfera más íntima y la realidad exterior. La matemática era también entonces el principio de este posible nexo. En cualquier caso, las modalidades de crecimiento en la geometría antigua, sugeridas por el dios, se reflejan hoy en el crecimiento de los números en el cálculo digital, incidiendo de forma esencial en la estabilidad del cálculo y en el poder de previsión de los modelos matemáticos. De hecho, las modalidades de crecimiento de las figuras *geométricas*, sobre todo del cuadrado, están relacionadas con procedimientos *numéricos* que generan fracciones p/q que se aproximan a números irracionales, siendo p y q números enteros. Pero normalmente p y q crecen más rápidamente cuanto más rápida es la convergencia del método, con posibles efectos negativos sobre la precisión y sobre la estabilidad de todo el proceso de cálculo.

La tesis por la que los números irracionales son entes reales, con un estatuto ontológico equiparable al de los números enteros, fue una conquista

de la matemática de finales del siglo XIX y del modo en el que se definió entonces el concepto aritmético de continuidad. Pero el desarrollo de la ciencia de los algoritmos y del cálculo digital en el siglo XX se convirtió en expresión de una nueva oposición: una especie de último acto de aquella perenne tensión entre números y geometrías, entre discreto y continuo, al que ya aludían las célebres paradojas de Zenón. Es lícito hablar de oposición, porque el estudio de los algoritmos fue propiciado, desde los primeros años del siglo XX, por un concurso de ideas orientadas a revalorizar los aspectos más realistas y constructivos de la matemática, en antítesis a aquellas abstracciones de las que habían nacido las paradojas y la crisis de los fundamentos: por un lado, el magisterio del matemático francés Émile Borel, que señalaba la importancia de definir los entes matemáticos mediante construcciones algorítmicas; por otro, la drástica escisión llevada a cabo por L. E. J. Brouwer y por el intuicionismo matemático en el interior del conjunto de la estructura de la matemática. Sosteniendo que un número solo existe si es construido, Brouwer lanzó un ataque general al sistema científico entonces imperante, poniendo en duda las definiciones fundamentales del análisis clásico.

Las filosofías constructivistas, que se basan en una idea de computabilidad efectiva, han asignado una nueva primacía a lo que parecía ajeno a la vocación abstracta de la matemática, es decir, han dado importancia a la operación concreta, al hecho de la naturaleza y finalmente al proceso computacional que se desarrolla en el interior de una máquina en los límites permitidos de espacio y de tiempo. Pero también es evidente que importantes estrategias computacionales están inspiradas en los mismos esquemas que los hombres elaboraron en los tiempos en que estaban en estrecha comunicación con los dioses. Por necesidades rituales, tanto en la India védica como en Grecia, el motivo del crecimiento de las magnitudes era de fundamental importancia y debía ser afrontado matemáticamente. Y los esquemas para hacer crecer una magnitud de forma geométrica se pueden apreciar todavía en las fórmulas de la matemática computacional más avanzada. Los esquemas no han cambiado, pero han sido ciertamente ampliados y perfeccionados por complejas teorías matemáticas. De estas

teorías obtenemos también una razón de su eficiencia y de su efectiva capacidad de traducir los modelos matemáticos de la naturaleza en pura información digital.

El mismo proceso computacional, el mismo proceso articulado en una infinidad de operaciones automáticas concretas, puede desarrollarse solamente gracias a estructuras matemáticas abstractas, insertables más o menos artificialmente en el cálculo. La abstracción matemática se combina de forma necesaria y sistemática con la materialidad de la ejecución automática de las operaciones. El cálculo es posible gracias a complejos presupuestos teóricos y a especiales propiedades de los números, las funciones y las matrices.

Queda, por tanto, abierta la pregunta: ¿son los números entes reales? Y, en caso afirmativo, ¿lo son todos de la misma forma? Las dos cuestiones deben afrontarse al mismo tiempo. La historia del último siglo y un análisis de los conceptos de número y de algoritmo dejan ahora entrever una primera conclusión: existen diferentes especies de números, que no poseen el mismo estatuto ontológico, pero de los que se puede predicar una existencia real por diversas razones y bajo diferentes puntos de vista. Un criterio decisivo para establecer la realidad de los números es el modo en que estos crecen en los procesos de cálculo. Y las primeras razones de este fenómeno deben buscarse en el análisis del crecimiento de las magnitudes geométricas elaborado en el pensamiento antiguo, sobre todo en la matemática griega, védica y mesopotámica.

[1] Así parece pensar, entre otros, Eugene P. Wigner, en un artículo ya famoso: «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences», en *Communications on Pure and Applied*

Mathematics, XIII, 1960.

[2] Fue Turing quien extendió la idea de algoritmo como proceso, ya adelantada en 1937 a los algoritmos numéricos y a la ejecución de operaciones por medio de un ordenador. Véase A. M. Turing, «Rounding-off Errors in Matrix Processes» (1948), en *Collected works of A. M. Turing*, vol. II, a cargo de J. L. Britton, North-Holland, Ámsterdam, 1992.

1

Abstracción, existencia y realidad

¿Cuál es el origen de la matemática y qué fines se propone? ¿Por qué existen triángulos, cuadrados, círculos y pentágonos? ¿Qué tipo de realidad o de existencia se puede asignar a los números? La matemática, como a veces señalan incluso los formalistas más intransigentes, es un verdadero conocimiento, y el objeto de tal conocimiento, podríamos anticipar con confianza, no es arbitrario, no depende de una imaginación caprichosa o de la elección variable de determinados axiomas o principios. También a menudo se percibe como una realidad exterior, independiente de la mente que la elabora.

Pensamos, por lo general, que la matemática es una ciencia abstracta porque, justamente, hace abstracción de entes concretos, como números, relaciones y figuras geométricas, para estudiar sus propiedades comunes, como si esas propiedades fueran a su vez nuevas entidades que obedecen leyes propias. Con la ventaja de que todo lo que se dice sobre estas últimas puede ser después aplicado a los diferentes entes concretos de los que se había hecho abstracción. El razonamiento, cuando es abstracto, se vuelve así más general y poderoso. Pero la abstracción hace más problemática la identificación de una «esencia» de los entes matemáticos, de una naturaleza intrínseca propia susceptible de definición. De su existencia, al menos como objetos de nuestro pensamiento, no parece derivarse una realidad de la esencia como algo estable y claramente reconocible. Parece faltar la tradicional y recíproca conexión entre *essentia* y *existentia*, por la que la

una no tendría realidad sin la otra.[3] ¿Consiste la esencia de los números en alguna naturaleza especial propia que podemos intuir directamente? ¿O más bien se obtiene de las propiedades de un dominio abstracto del que los números en cuestión solo son un posible —no necesariamente único— ejemplo?

Normalmente, se recurre a la segunda idea. Las propiedades estudiadas por separado forman un sistema de verdades obtenidas de axiomas, y la matemática, disociada de toda intuición directa, sería entonces una ciencia de puras relaciones formales, independiente de la interpretación concreta de cada una. Un campo específico de números,[4] como el de los números reales o de los números complejos, cumple los mismos axiomas a los que obedecen también *otros* dominios de entes matemáticos. Puede entonces suceder que un campo de números sea identificado solo, sin existir un isomorfismo, al ser indistinguible de otros entes matemáticos que gozan de las mismas propiedades. Una circunstancia que es suficiente para hacer que la matemática sea completamente indiferente a la posible investigación de la naturaleza específica de esos números.

El reconocimiento o la caracterización de un objeto matemático depende, por lo general, de su especificación a través de propiedades independientes de cualquier construcción o representación. Y a veces basta una única y simple definición basada en algunas propiedades para identificar toda una clase de dominios isomorfos.[5]

¿Son adecuados los instrumentos de la lógica para establecer si un ente matemático existe realmente, y en qué condiciones, de algún modo en un mundo exterior independiente de nosotros? Sobre esta cuestión hay opiniones contrarias; existe, por ejemplo, una relativa distancia entre las convicciones de Gottlob Frege y las de Bertrand Russell, por citar solo a algunos grandes representantes del primer logicismo, en el que se inspiró la idea de demostrar que toda la matemática se basa en la lógica. Para Frege los números eran objetos lógicos que hay que definir de algún modo, y definirlos no significa crearlos, sino subrayar que existen por derecho propio.[6] La postura de Russell es otra, pues se inclina más por el nominalismo, aunque a veces fluctúa. Para Russell la lógica en su conjunto

era un instrumento indispensable de conocimiento del mundo *exterior*. En *Conocimiento del mundo exterior* (1914) escribía que los elementos fundamentales para explicar la naturaleza de los acontecimientos son las cosas, las cualidades y las *relaciones*, que la lógica anterior había ignorado, asumiendo que todas las afirmaciones tienen la forma de sujeto-predicado. La lógica tradicional no había considerado la *realidad* de las relaciones, que, sin embargo, eran indispensables para describir el mundo y para disipar los errores de la metafísica tradicional. Si acaso, habrían sido precisamente la mística y la metafísica tradicional las que, para Russell, sostenían la irrealidad del mundo tal y como lo percibimos. La lógica, explicaba también Russell, sirve para articular una descripción del mundo partiendo de proposiciones atómicas que registran hechos de la experiencia de carácter empírico. De las proposiciones atómicas se pasa a proposiciones más complejas, siempre gracias a la lógica. La lógica no interviene, evidentemente, en la detección de los hechos elementales, sino que constituye un conocimiento integral, de carácter apriorístico, en el que se basan todas las posibles deducciones. Este conjunto de deducciones, pese a no derivar únicamente del conocimiento sensorial, hay que considerarlo como un conocimiento verdadero y efectivo. Y la matemática, concluía Russell, es parte esencial de él.

Sin embargo, si se atiende a lo que la lógica nos dice realmente, parece prevalecer, a veces, el nominalismo más radical. Russell debía también admitir que las clases que definen a los números no son cosas cuya existencia debamos establecer. Ciertamente, con el lenguaje de la lógica se hace un esfuerzo para declarar existente un número, un conjunto o una función. Pero la *realidad* de los números no coincide en absoluto con la asistencia establecida con ese lenguaje. Las proposiciones lógicas que afirman que un ente matemático existe sirven «no para conseguir saber lo que hay en él, sino para saber lo que una aserción dada o una tesis dada, nuestra o ajena, *dice* lo que hay en él; y esto es propiamente un problema lingüístico, no un problema ontológico».[7]

La lógica no basta para crear una ontología de objetos abstractos. Ni deben sorprender las palabras con las que Goodman y Quine resumían, en

1947, el radical nominalismo implícito en el proyecto de basar la matemática en la lógica: «No creemos en objetos abstractos. Nadie supone que unas entidades abstractas —clases, relaciones, proposiciones, etc.— existan en el espacio-tiempo; pero queremos añadir más: nosotros prescindimos completamente de ellos».[8]

Conviene, no obstante, aclarar que a menudo los «objetos abstractos» son susceptibles de existir de diferentes formas y de encarnarse realmente en entidades relativamente concretas que viven en el espacio y en el tiempo. Esta circunstancia depende de al menos dos razones distintas y diferentes: la existencia de un cálculo automático que se desarrolla en el espacio y en el tiempo físicos de una máquina, y la extendida convicción de que los entes matemáticos son como organismos vivos, capaces de dictar las condiciones concretas que nos permiten estudiarlos y entenderlos. La posibilidad de operar, en ciertas condiciones, sobre los números que existen físicamente como secuencias binarias en la memoria de un ordenador es un dato decisivo de por sí. John von Neumann pudo observar cómo el cálculo automático a gran escala que se estaba desarrollando desde los años cuarenta con la creación de los primeros ordenadores era un cálculo en el *espacio* y en el *tiempo* posibilitado por estructuras abstractas que solo la matemática pura era capaz de elaborar. Abstracción matemática y realidad física vivían de forma inseparable en la nueva ciencia del cálculo.

Cuando hablamos de realidad nos adentramos en un terreno extremadamente arduo y sutil, donde las cosas pueden invertirse: real puede ser también un número que no existe como querríamos o esperaríamos, pero que nos sentimos de alguna forma obligados a definir, con arreglo a nuestras necesidades o a las del algoritmo.[9] Por otra parte, el propio Quine, al definir los números reales, se refería a teorías anteriores, como la de Dedekindo y la de Weierstrass, que a su vez eran deudoras de una variedad de conocimientos que se remontan *al menos* a la teoría de las proporciones del libro V de los *Elementos* de Euclides. Y esta teoría era avalada a su vez por conocimientos de naturaleza computacional mucho más antiguos que las teorías euclidianas. Lo que parece decisivo para valorar un contenido de realidad es una concurrencia de experiencias y de situaciones, teóricas y

aplicadas, que se hunden a menudo en el pasado más remoto, que hacen casi necesaria una determinada definición o una determinada teoría y que sea construida de una forma y no de otra. Ernst Mach escribió páginas de gran interés sobre el modo en que se producen los descubrimientos científicos: siempre se acaba por retomar lo que ya se sabía, en una ininterrumpida combinación entre ignoto y conocido, entre análisis y síntesis, entre descubrimiento y reconocimiento. El descubrimiento y la invención son respaldadas, por lo general, por una historia subyacente y por una cadena de ideas que las ha propiciado y hecho necesarias.

Para simplificar, se podría comenzar por asumir que el realista es el que sostiene que los enunciados de una teoría científica son verdaderos o falsos, y que lo que los hace tales es algo exterior a nosotros, algo diferente de los datos sensoriales, de nuestro lenguaje y de nuestro pensamiento.[10] ¿Podría ser plausible, entonces, la idea de hacer depender la realidad del número de la del mundo físico? Las innumerables aplicaciones de la matemática a la física, a la economía, a la ingeniería, a la química y a la informática forman un cuerpo de conocimientos impresionantemente amplio y eficaz que parece poder basar la realidad de las fórmulas en una filosofía naturalista de algún tipo, fundamentada en la idea de que el universo consta exclusivamente de objetos naturales, objetos colocados en el espacio-tiempo y sujetos a leyes causales. El universo es un enorme libro —escribió Galileo en un célebre pasaje de *El ensayador*— escrito en lenguaje matemático, y es imposible entenderlo sin utilizar triángulos, círculos y figuras geométricas de otro tipo. Pero cabe dudar que esta sea la única circunstancia que imprime un carácter de realidad a los entes matemáticos; solo podemos afirmar que no es posible ser realistas respecto a la teoría física y a la vez nominalistas respecto a la teoría matemática.[11]

No está claro, por tanto, que un realismo filosófico respecto a la física sea la única forma de crear una realidad matemática. Aunque sea nuestra mente la que elabora los cálculos, se halla ampliamente reconocido que, prescindiendo de su aplicación al mundo real, nos encontramos finalmente ante algoritmos, fórmulas y demostraciones con rasgos más o menos variables, pero capaces de dictarnos, a nuestro pesar, las condiciones y las

modalidades de su existencia, a semejanza de criaturas resistentes y obstinadas. Por esto los matemáticos declaran tan a menudo que se sienten obligados a reconocer ciertos entes y no otros, que se asombran ante verdades que parecen venir de otro mundo, o al menos de una realidad exterior a nuestra capacidad perceptiva, a nuestro lenguaje o a nuestra estructura mental.[12] Una circunstancia que induciría por sí misma a reconsiderar la tesis de Kant sobre el carácter apriorístico del pensamiento matemático, según la cual «la razón solo reconoce lo que ella misma produce según su patrón» (*Crítica de la razón pura*, Prefacio a la segunda edición, 1787). Los entes matemáticos, tal y como los conciben muchos científicos y como los percibía concretamente Charles Hermite, no son composiciones artificiales muertas, sino seres vivos y reales, con una coherencia e intencionalidad propias capaces de orientar nuestra investigación y de imponer condiciones a esa libertad y autonomía que tendemos a atribuir a los patrones de nuestra razón.

«Definir lo *real*. Eso es lo más importante», anotaba Simone Weil. Y su primera conclusión era: «Lo real es trascendente; esta es la idea esencial de Platón».[13] Es necesario, pues, al menos por dos razones, empezar por la matemática antigua: de la filosofía pitagórica, así como de los cálculos védicos y mesopotámicos, emerge la cuestión de la realidad de los entes matemáticos, y el cálculo moderno, desde el siglo XVI hasta hoy, se basa en construcciones elaboradas por la ciencia antigua. En Grecia, el problema de la realidad de los números se planteaba al menos de forma implícita, porque se trataba de comprender qué relación mantienen los entes matemáticos con el infinito, con el no ser del *ápeiron*. El infinito era ausencia (*stéresis*), potencialidad pura, y cualquier cosa, para existir y permanecer, tendría que oponerse a la negatividad de lo ilimitado. Esta era, en la matemática griega, la función del *lógos*, de la relación, en la que se encuentran los pródromos del número moderno. La relación, y lo que esta implicaba, era, no solo en Grecia, una entidad cercana a los dioses. Pero entonces era precisamente en la relación donde había que encontrar la realidad del número: no es casual que gracias a una recuperación de los conceptos de relación y de proporción (tal y como se encuentran en Euclides y en la ciencia computacional

preeuclidiana) fue como los matemáticos del siglo XIX crearon la ontología del número y del continuo aritmético. Esta circunstancia fue lo que avaló la lógica de los cuantificadores con la que se afirma que *existe* (cuantificador existencial) una determinada clase, o bien que las condiciones que permiten identificar un número deben cumplirse *para todo* (cuantificador universal) valor de ciertas variables. Una circunstancia que permitió a Bertrand Russell afirmar que «el sentido de la realidad es vital en lógica».[14] Esto no bastó para crear realmente una ontología, pero lo que como consecuencia se hizo, para remediar tal insuficiencia, es una continuación ideal de procesos computacionales ya conocidos en épocas remotas no solo en Grecia, sino también en China, la India y Mesopotamia.

Los procesos de enumeración utilizados desde los tiempos más antiguos solían tener la función de convertir en reales las cosas, los hombres y los dioses, por medio de un gesto demostrativo o deíctico, introduciéndolos en el escenario del mundo para hacerlos actuales y reconocibles, con pleno derecho de existencia en el espacio y en el tiempo. Enumeraciones, inventarios, listas y catálogos se repiten con frecuencia en Homero y en Hesíodo, en Esquilo y en Herodoto, así como en el Antiguo Testamento. La enumeración era una prerrogativa del *lógos*, que aludía a una operación de elección y de recopilación, de agregación ordenada de varias entidades en un único conjunto. Los mismos números, en la tradición pitagórica, eran desplazados como conjuntos de puntos en el espacio, con un orden parecido al de los ejércitos o de los astros del firmamento. Por tanto, los números con los que se contaba no eran solamente abstractos, sino también reales y realizables. Sin embargo, con la demostración de que existen tamaños inconmensurables, se descubrió que el número natural, el *arithmós*, no basta para dar una existencia efectiva a aquellas entidades que hoy llamamos números irracionales. Existen relaciones entre tamaños que no son expresables como relaciones entre números enteros; existen entidades fantasmas, como demostraría Georg Cantor en el siglo XIX con el *método diagonal*, que escapan a cualquier enumeración. En la matemática griega se trató de representar indirectamente estas entidades por medio de secuencias de números, de relaciones y de figuras geométricas reguladas por una ley de

crecimiento o de decrecimiento. La matemática moderna se serviría de análogas secuencias para definir los números irracionales.

[3] Así, A. Schopenhauer, «Preisschrift über die Freiheit des Willens» (1839), en *Die beiden Grundprobleme der Ethik*, en *Zürcher Ausgabe. Werke in zehn Bänden*, Diogenes, Zúrich, 1977, vol. VI, p. 96. (trad. it. *Sulla libertà del volere*, en *I due problemi fondamentali dell'etica*, a cargo de G. Faggin, Boringhieri, Turín, 1961, pp. 127-128): «Cada *existentia* presupone una *essentia*: es decir, cada existente debe ser también *algo*, tener una esencia determinada. No puede *existir* y sin embargo ser *nada*, es decir, un algo como el *Ens metaphysicum*, o sea, algo que no es más que ser, carente de cualquier determinación y cualidad y, por tanto, sin la forma de actuar determinada que se deriva de ello: como una *essentia* no puede tener realidad sin la *existentia* (Kant lo demostró con el conocido ejemplo de los cien pesos), así una *existentia* no puede tener realidad sin la *essentia*».

[4] Un conjunto K contenido en el conjunto de los números complejos es un *campo de números* si K contiene al menos un elemento no nulo y, operando sobre los elementos de K con las cuatro operaciones racionales (suma, diferencia, producto y división), se obtiene otro elemento de K. Es decir, se trata esencialmente de un campo *cerrado* respecto a las cuatro operaciones racionales.

[5] Dos dominios son isomorfos, y por tanto indistinguibles, si existe una correspondencia biunívoca g entre uno y otro tal que el resultado de una operación entre dos elementos x e y del primer dominio A es igual al resultado de esa misma operación sobre los elementos $g(x)$ y $g(y)$ del segundo dominio B. Si la operación es una suma, se tiene $g(x + y) = g(x) + g(y)$. La noción de «espacio vectorial n-dimensional sobre los reales» basta para identificar un solo objeto matemático sin isomorfismos, porque un teorema establece que dos cualesquiera espacios vectoriales n-dimensionales sobre los reales son isomorfos. La situación es análoga en el campo de los números racionales Q, con las operaciones ordinarias de suma y producto y con la acostumbrada relación de orden entre fracciones ($n/m < p/q$ si $nq < mp$). Si un campo numérico K con operaciones de suma y producto y con relación de orden está contenido en cualquier campo con suma, producto y relación de orden, entonces K coincide con Q. Véase B. Artmann, *Der Zahlbegriff*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1983, pp. 18-19.

[6] S. Körner, *The philosophy of mathematics* (1960), Dover, Nueva York, 1986, p. 36.

[7] W. V. Quine, «Su ciò che vi è», en *Il problema del significato*, Ubaldini, Roma, 1966, p. 16 (ed. orig. *From a logical point of view* [1953], segunda edición revisada, Harvard University Press, Cambridge [Mass.], 1961). Cfr. también J. J. Katz, *Realistic Rationalism*, The MIT Press, Cambridge (Mass.), 1998, pp. 117-175.

[8] N. Goodman, W.V. Quine, «Steps Toward a Constructive Nominalism», en *The Journal of Symbolic Logic*, XII, 1947, p. 105.

[9] Valga para todos el ejemplo de los números complejos, introducidos por Rafael Bombelli a raíz de los estudios sobre las ecuaciones de tercer grado, un paso necesario para establecer el teorema fundamental del álgebra, por el cual una ecuación algebraica siempre tiene una solución. Más concretamente, si $p(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes en un campo K, entonces existe un elemento z en K tal que $p(z) = 0$.

[10] Esta definición del realista, debida a Michael Dummett, se halla recogida en H. Putnam, *Mathematics, matter and method*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975, pp. 69-70 (trad. it. *Matematica, materia e metodo*, Adelphi, Milano, 1993, p. 90). Entre los matemáticos, se halla extendida la idea de que existe un mundo exterior de conceptos y teoremas que es nuestra tarea explorar.

[11] La tesis es defendida por H. Putnam, *ibid.*, pp. 70 y ss. (trad. it. cit., pp. 90 y ss.).

[12] *Ibid*., p. 70 (trad. it. cit., p. 90). Para Michael Dummett, recuerda Putnam, en la formulación de un realismo filosófico interviene como ingrediente fundamental la percepción de un mundo exterior a nuestra mente.

[13] S. Weil, *Cahiers*, en *Œuvres complètes*, a cargo de F. de Lussy, Gallimard, París, vol. VI, tomo III, 2002, p. 179 (trad. it. *Quaderni*, a cargo de G. Gaeta, Adelphi, Milán, vol. III, 1988, p. 175).

[14] B. Russell, *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milán, 1962, p. 272 (ed. orig. *Introduction to mathematical philosophy*, Allen and Unwin, Londres, 1919).

2

La matemática de los dioses

Es difícil decir por qué y de dónde proviene la matemática, y quizá incluso no sirva de nada, si se atiende a las argumentaciones de quienes, para desalentar empresas así, han tratado de demostrar su intrínseca insensatez. En *Humano, demasiado humano* (ap. 249), Nietzsche denunciaba el lastre, el profundo cansancio, que puede suponer una mirada dirigida sistemáticamente al pasado. En la segunda consideración desfasada, *Sobre la utilidad y el perjuicio de la historia para la vida*, el alma del anticuario, que custodia y archiva cuidadosamente el pasado, puede ser víctima de una furia coleccionista ciega y de una curiosidad opresiva que obstaculiza toda gran resolución para lo que es nuevo y vital. Después de Nietzsche, Michel Foucault explicaba que los orígenes de cualquier saber son muchos, y que no tiene sentido buscar solo uno como si fuera la única fuente de todo.

Parece que la matemática no puede escapar a esta regla: para empezar existen muchas matemáticas; la aritmética, la física matemática, el álgebra, la geometría, el análisis y la estadística responden a cuestiones distintas y obedecen a criterios distintos y a técnicas demostrativas distintas, aunque en muchos casos el estudio de las estructuras matemáticas abstractas ha revelado sorprendentes afinidades entre ámbitos dispares, dejando entrever las líneas de un conocimiento unitario. A lo largo del tiempo, las teorías matemáticas han cambiado frecuentemente de aspecto y han sido pensadas y formuladas de muchos modos y con diferentes finalidades, ramificándose en otras teorías. Las matemáticas han nacido y renacido innumerables

veces, hasta el punto de hacernos pensar en una idea de tradición como la del apólogo del Talmud sobre Moisés y Rabbi Akiba.[15] Moisés, cuenta el apólogo, recibe del Señor del mundo la Torah escrita con letras adornadas con infinitos rizos y coronas. Por cada rizo, le predice el Señor, Akiba formulará algún día innumerables doctrinas. Moisés pide conocerlas, y el Señor le concede la gracia de sentarse, junto a otros escolares, en la octava fila del aula en la que Akiba impartirá sus enseñanzas. Moisés, consternado, no entiende nada de lo que el rabino está explicando. Pero se tranquiliza cuando los escolares le preguntan al rabino de qué forma ha llegado a encarar una determinada cuestión y este responde que se trata de una doctrina entregada a Moisés en el monte Sinaí. Aquí se halla contenido todo el significado de la tradición, de la continua recuperación de sabidurías antiguas según formulaciones más avanzadas y susceptibles de convertirse en una nueva sabiduría. La matemática no es una excepción.

Podemos, no obstante, identificar algunos temas originarios que explican cómo y por qué la matemática se ha concretado, en el tiempo, de la forma que conocemos y no de otro modo. A finales del siglo XIX, se vio finalmente con claridad de qué presupuestos era necesario partir. La matemática, se teorizaba, nace de una libre actividad del intelecto, de un *esprit* que calcula, sin dejarse condicionar por circunstancias extrañas, mediante simples operaciones de conjuntos. El acto intelectual más sencillo, fundamental y aparentemente inmune de contradicciones consistió en reagrupar diferentes entes (números, funciones y matrices) en una única clase y tratar de operar entre dichos entes sin salir de esa clase. Se trataba de demostrar que la clase en la que se opera es *cerrada*,[16] una propiedad tranquilizadora, porque impide tropezar, durante el cálculo, con un ente ajeno que se sustraiga a las reglas establecidas para dicha clase. A veces es necesario salir de una determinada clase, como es el caso de las soluciones de una ecuación algebraica, las cuales pueden ser números reales o complejos y obligan, por tanto, a salir del campo de los números racionales. Como es ya sabido, la extensión a los números complejos nació de las investigaciones sobre la resolución de las ecuaciones algebraicas de tercer grado. Rafael Bompelli fue, después de Girolamo Cardano, su artífice

principal. Pero el campo de los números complejos es a su vez cerrado respecto a las operaciones aditiva y multiplicativa, que generalizan, dentro del campo, las operaciones ordinarias entre números racionales o reales.

El estudio de dominios cada vez más abstractos y complejos no hizo tambalearse la convicción, madurada en el siglo XIX, de que cualquier cosa puede relacionarse con el simple concepto de número entero, mientras que el número entero, a su vez, puede relacionarse con el todavía más simple concepto de conjunto. Las grandes construcciones de Weierstrass, Peano, Cantor, Dedekind o Veronés se inspiraban en el gran proyecto de *aritmetizar* el análisis, de hacer derivar todo el edificio matemático, al menos en líneas generales, del número entero, de la teoría de los conjuntos y del concepto de límite.

Sin embargo, hay que distinguir entre origen y consecuencias. ¿Nació realmente la matemática de operaciones de conjuntos como las elaboradas por la ciencia del siglo XIX? Si nos atenemos a las fuentes, la respuesta solo puede ser negativa.

En la antigua matemática mesopotámica encontramos cálculos aritméticos semejantes a procedimientos modernos, verdaderos algoritmos precursores. La geometría védica de los altares de fuego comprende el estudio de la equivalencia entre figuras geométricas, como la circularización del cuadrado, y con este fin requiere cuidadosos procedimientos numéricos, como la aproximación de la raíz cuadrada de 2. Para los pitagóricos, los números tenían forma geométrica, circunstancia que imponía de por sí el análisis de la relación entre números y figuras que habría conducido —se puede conjeturar— al descubrimiento de magnitudes inconmensurables. En Grecia encontramos una geometría virtualmente relacionada con el álgebra y con la *computatio* que precede a la moderna ciencia del cálculo. También se reconocen sus esquemas fundamentales en la antigua matemática china. Por lo tanto, en general se observa cómo en diferentes tradiciones pronto se estableció, entre número y figura geométrica, una relación enigmática, una tensión problemática de la que se derivaría, además del estudio de la inconmensurabilidad, el análisis del concepto de infinito y de la estructura de la continuidad, así como el *lógos* matemático, una ciencia de las

relaciones como fundamento de un cosmos inteligible. De esta tensión problemática surgieron los primeros intentos de dar forma a conceptos tan importantes como la inconmensurabilidad, la constructibilidad efectiva o la aproximación, que marcaron toda la matemática posterior.

No puede negarse que el cálculo revela, en su primera aparición en civilizaciones remotas, una profunda afinidad con prácticas y saberes de distinta naturaleza. Por escasas que sean las fuentes, estamos autorizados a creer que matemática y filosofía, geometría y religión, cálculo y metafísica provienen de una única, grandiosa y originaria combinación recíproca. Dicha combinación no compromete de ningún modo la especificidad del saber matemático, no implica que la matemática sirva para alguna otra cosa o que necesite justificaciones externas. Si acaso, es verdad lo contrario: las fórmulas del álgebra y las construcciones de la geometría gozan de una especificidad indiscutible y de una evidencia concluyente, de una claridad, por decirlo así, última, que no necesita más explicaciones y justificaciones que las que se encuentran en ellas mismas. Tampoco la lógica es capaz de explicarlas de forma exhaustiva. Los cálculos parecen áridos y extraños al ámbito filosófico-religioso, pero esto es pura apariencia: religión y matemática, metafísica y cálculo, acción ritual y pensamiento exacto parecen combinarse, al principio, en una única e imponente estructura. Una combinación que debe detectarse en los grandes diseños de la cosmología antigua, en las intuiciones de los primeros filósofos, así como en las estrategias computacionales y en los cálculos más pequeños, a los que estaban acostumbrados los matemáticos griegos, indios, chinos y babilonios.

De las fuentes se desprende que los primeros en plantear cuestiones matemáticas no fueron hombres, sino dioses, o al menos hombres inspirados por los dioses. Prueba de ello es una variedad impresionante de relatos, explicaciones y concordancias. El Prometeo de Esquilo es el inventor del número y el primero en distinguir los signos astronómicos que marcan los grandes ciclos del tiempo, los cuales requerirían una teoría matemática de las relaciones. Análogas prerrogativas tenían el dios egipcio Thot, *alter ego* de Prometeo y de Hermes, así como Palamedes, alumno del

centauro Quirón y héroe de la guerra de Troya. Platón lo menciona en *Fedro* (261 b-d), lo llama *eliático* y le atribuye las mismas capacidades dialécticas que a Zenón. A Gorgias se debe una *Apología de Palamedes* (82 B 11.ª DK) que se inscribe en una tradición ética alternativa a la de Homero, en la que Odiseo aparece bajo una luz poco halagüeña. Como menciona Jámblico (*La vita pitagórica*, 31), de los seres vivos dotados de razón uno es dios, el otro es el hombre y el tercero tiene la naturaleza de Pitágoras. El mismo Pitágoras aprendió de los egipcios y de los babilonios un arte de la medida transmitido por los dioses. Parménides aprendió de la diosa que el ser es uno y perfecto. Su visión metafísica, no ajena a una concepción matemática del mundo, podría aproximarse a la idea de espacio absoluto que Newton esbozaría en los *Principia*. Platón afirma que la matemática nos fue transmitida por Urano, el dios del cielo, que expresa en el movimiento de los astros las leyes de los números y de las relaciones (*Epinomis*, 977 b).

Sabemos que los dioses de la tradición védica tenían una prerrogativa: eran completamente claros y veraces. Lo cual, observa Charles Malamoud, era también su debilidad, que le imponía una extremada cautela o reticencia en su contacto con los hombres. Transparencia y veracidad implicaban exactitud; por lo tanto, exactas y precisas debían ser las formas de los altares, así como el ritmo de las acciones y de las actuaciones rituales. Pero precisamente la veracidad podía imponer, para protegerse, una sistemática falsificación: los nombres de los dioses eran deformados de manera deliberada para hacer inaccesible el nombre más secreto y verdadero. En esta deformación del nombre, advierte el *Satapatha Brahmana*, consistía, justamente, la mística. Nos parece oír las célebres palabras de las musas de Hesíodo (*Teogonia*, 27-28): «Sabemos decir muchas mentiras parecidas a la verdad, pero también sabemos, cuando queremos, el verdadero cantar».

Seguramente este era un motivo de atracción de la matemática, una ciencia exacta que propone *enigmas*, opacidades que hay que resolver mediante artificios basados en cálculos, razonamientos, demostraciones y algoritmos. Las paradojas de Zenón sobre la imposibilidad del movimiento son uno de los enigmas más célebres. Pero la oscuridad y el enigma

obedecían también al principio pitagórico según el cual «ninguna mentira recibe en sí la naturaleza del número», como reza un fragmento de Filolao (44 B 11 DK). Las figuras geométricas más simples, como la recta, el cuadrado, el triángulo y el círculo, planteaban de la forma más clara y accesible los enigmas más oscuros, como la naturaleza de la inconmensurabilidad de las magnitudes o la existencia de magnitudes infinitas e infinitesimales. Para los pitagóricos, la definición de las figuras tenía un carácter teológico, recuerda Proclo (*Comentario al I libro de los «Elementos» de Euclides*, 130), y no es de extrañar que cada figura estuviera asociada con un dios, una costumbre que se transmitiría a lo largo de los siglos, en sucesivas revisiones, al menos hasta Giordano Bruno.

En Grecia, la resolución de un problema matemático se traducía en una ofrenda votiva a los dioses: como atestigua una carta de Eratóstenes al rey Tolomeo llegada hasta nosotros a través de Eutocio, el comentarista tardío de Arquímedes, su mecanismo para la construcción de las medias proporcionales que servían para duplicar un cubo se convirtió en una ofrenda votiva colocada en el recinto del dios. Esto era, en griego, el *anathema*, palabra próxima a *thésis*, que denotaba la acción de formular o establecer algo, también en el ámbito de las ciencias jurídicas. Pero los matemáticos únicamente aspiran a demostrar una *tesis*; y, según una vertiginosa intuición de Simone Weil, la invención de la demostración rigurosa podría deberse a la gran atención prestada a imágenes consideradas como reflejos o encarnaciones de la realidad divina.

¿Qué herencia nos han dejado los dioses? ¿Les debe la matemática una simple colección de anécdotas y de leyendas, o bien un legado de auténtico conocimiento? La respuesta no deja lugar a dudas. De los problemas planteados por los dioses provienen las claves de un pensamiento sin el cual la matemática sería hoy impensable.

Podemos reconocer los motivos de esta persistente unión entre orden divino y humano, entre las propuestas originarias de los dioses y la matemática moderna, no tanto en los planteamientos generales, en las finalidades explícitas o en un programa de abstracción del mundo visible. El nexo es más sutil, pero al mismo tiempo mucho más fuerte, porque

implica las operaciones más técnicas y más secretas del cálculo, los esquemas fundamentales en los que se han basado el álgebra y el análisis hasta hoy. La conexión decisiva concierne a dos temas principales: los modos de crecimiento de las figuras geométricas y la equivalencia de figuras de diferente forma.

Las referencias fundamentales se encuentran en los *Sulvasutra* (*sulva* significa ‘cuerda’, instrumento utilizado, junto a las estacas, para hacer las medidas rituales), los tratados védicos sobre la construcción de los altares de fuego (Agni). Y sirven también para aclarar el origen y el significado de procedimientos sobre los que se edificó la matemática griega. Las versiones más importantes de estos tratados pertenecen a las escuelas de Baudhayana, de Apastamba y de Katyayana, y responden ante todo a la exigencia de establecer la equivalencia entre altares de distinta forma. La búsqueda de la equivalencia lleva a la construcción de un cuadrado con la misma área que un rectángulo, o bien de un círculo con la misma área que un cuadrado. De la circularización de un cuadrado nació, presumiblemente, el problema complementario, más célebre, de la cuadratura del círculo.

La otra exigencia es agrandar un altar manteniendo inalterada la forma. Quien era elegido para realizar el rito debía prever, al menos en principio, la construcción en cinco capas de ladrillos de altares de tamaño creciente, de superficies iguales a 7½, 8½, 9½, hasta 101½ *purusa* cuadrados, siendo *purusa* la unidad de longitud lineal aproximadamente igual a la altura de un hombre con los brazos levantados. Esto requería la resolución de varios problemas geométricos, como agrandar un cuadrado, o bien encontrar un cuadrado igual a la suma o a la diferencia de dos cuadrados dados, problemas cuya resolución implicaba el conocimiento del teorema de Pitágoras: el área del cuadrado construido sobre la diagonal de un rectángulo es la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del rectángulo.

La geometría védica se basa en construcciones geométricas que aparecen descritas, en época posterior, en los *Elementos* de Euclides. Pero no siempre los dos tratados responden a las mismas finalidades: en los *Elementos*, encontramos el rigor de las demostraciones; en los *Sulvasutra*, prima la idea

de un crecimiento dinámico de las figuras geométricas y el principio de invariabilidad de la forma al cambiar las dimensiones. La distancia entre la geometría védica y la griega se expresa sobre todo en la fórmula del cuadrado del binomio, $(a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$, una igualdad algebraica de gran importancia para el desarrollo del análisis moderno. En los *Sulvasutra* di Apastamba (III, 8)[17] se dan algunas fórmulas para aumentar cuadrados de lado determinado: una cuerda de 1½ *purusa* lleva a un cuadrado con un área igual a 2¼ *purusa* cuadrados, porque la fórmula del cuadrado del binomio se convierte en $(1 + ½)^2 = 1 + 1 + ¼ = 2¼$. En otros términos, si aumento en ½ el lado de longitud 1, el área del cuadrado crece 1¼. Análogamente, si a un cuadrado de lado 2 le añado la fracción ½, obtengo un cuadrado de área 6¼, porque $(2 + ½)^2 = 4 + 2 + ¼ = 6¼$. Justo después (III, 9), el texto explica la regla general: el incremento $2ah + h^2$ que ha de añadirse al cuadrado de lado a cuando este sufre el incremento h, está formado por dos rectángulos, $2ah$, y un cuadrado h^2, los cuales forman en total un gnomon,[18] la figura a escuadra que, aplicada al cuadrado de lado a, produce el cuadrado más grande de área $(a + h)^2$. La idea se halla contenida aquí: George Thibaut, que tradujo y comentó en el siglo XIX los más importantes tratados védicos sobre la construcción de los altares de fuego, la resumía recordando que Apastamba y Katyayana proponían «ejemplos significativos que ilustraban la forma en la que el incremento o la disminución del lado provoca el incremento o la disminución del cuadrado».[19] Pero en los *Sulvasutra* también encontramos la regla general del incremento y de la disminución.

Un dato importante es que Euclides demuestra una versión puramente geométrica de la fórmula del cuadrado del binomio (*Elementos*, II, 4). El rigor de la demostración euclidiana se halla ausente de los tratados védicos, pero Euclides no menciona la *naturaleza incremental* de la fórmula, que es el *incipit* de la naturaleza incremental no solo de las fórmulas del análisis (desde el siglo XVI en adelante), sino también de los procedimientos computacionales relacionados con ellas. Esta naturaleza incremental es, en cambio, clara y explícita en los *Sulvasutra*.

Estas y otras construcciones geométricas, como la del cubo de un binomio para el crecimiento de un cubo geométrico, fueron el principal instrumento para el análisis de las ecuaciones algebraicas en época renacentista y moderna. En el siglo XVI, el descubrimiento de los números complejos, obra sobre todo de Rafael Bombelli, se derivó del estudio de las ecuaciones de segundo y tercer grado basado en la regla del incremento (gnomónico) de un cuadrado o de un cubo. La resolución de las ecuaciones algebraicas por medio de gnomones fue el problema por excelencia, afrontado por primera vez, en Occidente, por Teón de Alejandría en el siglo IV, y en los siglos sucesivos por matemáticos árabes e italianos. El matemático francés François Viète elaboró a finales del siglo XVI un método general para resolver numéricamente una ecuación de grado arbitrario que consiste en una suerte de prolongación algebraica de la regla de incremento de un cuadrado o de un cubo. Newton simplificó el procedimiento de Viète y, a finales del siglo XVII, Joseph Raphson descubrió a su vez cómo expresar el método de Newton por medio de una simple fórmula iterativa.[20] En esta misma fórmula iterativa encontramos hoy el esquema esencial para resolver, con procedimientos automáticos muy eficientes, sistemas generales de ecuaciones y problemas de mínimo de funciones.

Pero de las reglas para el crecimiento de un cuadrado geométrico no dependen solo procedimientos numéricos individuales. En las mismas reglas encontramos las formas de razonamiento de las que dependió el desarrollo del análisis a partir del siglo XVIII, así como el estudio de la estabilidad de los sistemas de cálculo en épocas más recientes. En general, es muy importante saber cómo se comporta una función o todo un proceso de cálculo debido a pequeñas variaciones o incrementos de las variables. Se produce inestabilidad cada vez que *pequeñas* variaciones, incrementos o perturbaciones de las variables provocan una *gran* variación en el valor de la función, o bien en el resultado de un proceso de cálculo.

Para definir las principales operaciones del cálculo diferencial, el automatismo algebraico que permitía manipular los nuevos símbolos del infinito, Leibniz se valió de fórmulas como la del cuadrado de un

binomio.[21] De las mismas fórmulas se había servido pocos años antes Bonaventura Cavalieri para su método de los indivisibles.[22] Algunas estrategias fundamentales para discretizar los problemas sobre la continuidad, para traducir problemas diferenciales o integrales, en los que las variables adoptan valores en el continuo numérico, en problemas de naturaleza aritmética, resolubles con las operaciones ordinarias de suma y producto, se basan en fórmulas que generalizan la expresión del cuadrado del binomio. De esas mismas fórmulas depende en gran parte la relación entre continuo y discreto.

No es fácil encontrar en los *Sulvasutra* un exacto significado religioso de las formas geométricas de los altares de Agni, como tampoco lo es aclarar con arreglo a esos únicos textos por qué el pensamiento matemático acabaría asumiendo, en los siglos siguientes, las formas que conocemos y no otras. Se puede, no obstante, recurrir a una literatura más extensa. Alusiones exactas y listas de figuras de medidas y de operaciones geométricas se utilizan en textos que, por lo general, se atribuyen a testimonios más antiguos de los *Sulvasutra*, y que incluyen amplias exégesis de carácter mítico, ritual y metafísico. La *Taittiriya Samhita* (5, 4, 11) contiene una larga lista de altares con diferentes estructuras geométricas, y varios pasajes del *Satapatha Brahmana* aluden a construcciones de altares con forma de halcón que son el preludio de un vuelo simbólico. Las formas geométricas se miden en *purusa*, y en su versión más primitiva el cuerpo estilizado que se asemeja a un ave está compuesto por siete cuadrados, cuatro de los cuales forman el cuerpo central, dos las alas y el otro la cola. Se transmite que los *rsi*, los espíritus vitales, crearon siete personas diferentes con forma de cuadrado y que los siete cuadrados formaron un solo cuerpo, el cuerpo con el que fue forjado al inicio Prajapati, el creador de todo el universo, de los seres mortales y de los inmortales (*Satapatha Brahmana*, VI, 1, 1, 13; X, 2, 3, 18).

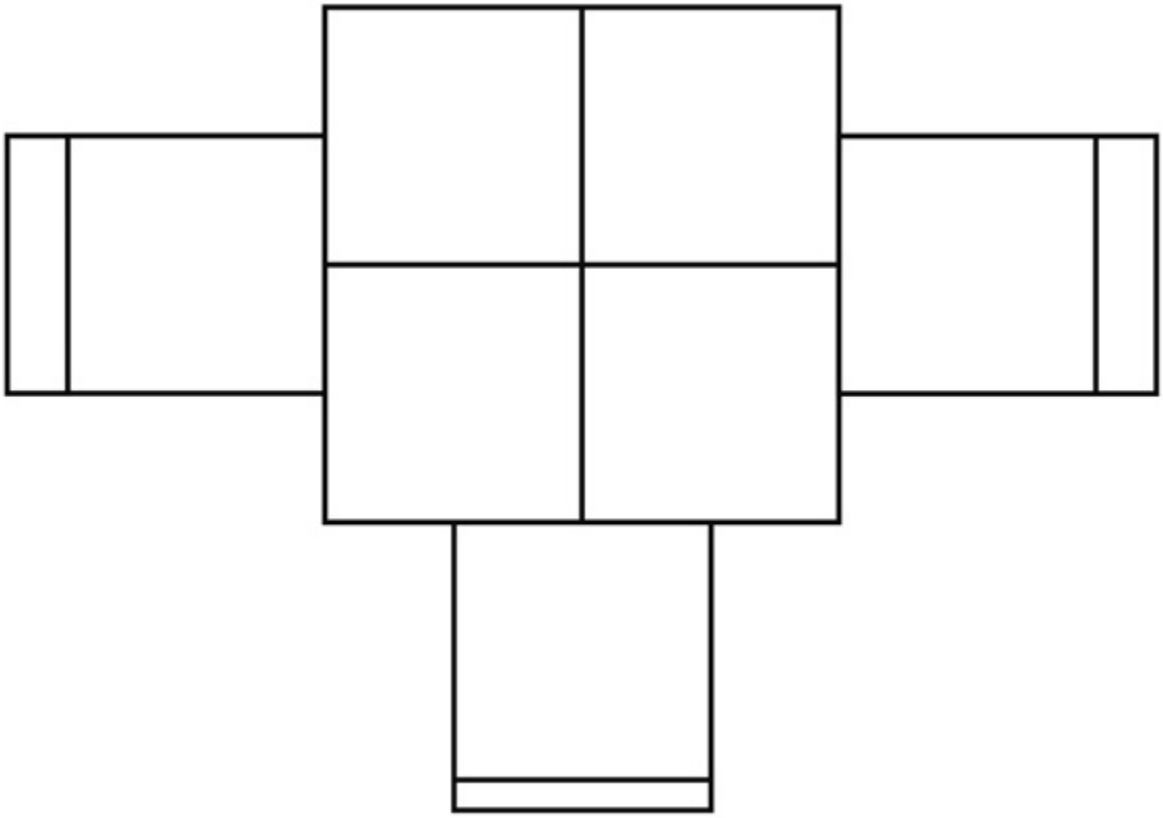


Figura 1

¿Con qué finalidad se edificó el altar de fuego? Se empieza con el mito de Prajapati, el señor y creador del mundo que, como se lee en el *Satapatha Brahmana* (VI, 1, 1, 12-13), queda destrozado y desarticulado a causa de la creación de la que él es artífice. El espíritu vital sale de él y los dioses lo abandonan. Pero Prajapati pide a Agni que lo reconstruya, y Agni es precisamente el altar que consiste en el cuerpo reconstruido de Prajapati.

El *Satapatha Brahmapa* (VI, 1, 2, 36) explica que, adoptando la forma de ave, los espíritus vitales se han convertido en Prajapati y que «adoptando esa forma [del altar] Prajapati creó a los dioses». Los dioses se vuelven a su vez inmortales. Un pasaje de la *Brhadaranyaka Upanisad* (I, 4, 6) explica que Prajapati ha proyectado a los dioses que son superiores a él, y que él, aunque de naturaleza mortal, ha procreado todo lo que es de naturaleza inmortal.

Pero ¿cómo ha podido suceder esta especie de hipercreación de un inmortal por parte de un mortal, y de qué modo podemos imaginar al creador del universo como un ser mortal? Del texto del *Upanisad* y del comentario de Sankara se deduce que Prajapati puede ser visto desde distintas perspectivas y asume cualidades aparentemente contradictorias. Se sitúa con el mismo derecho tanto dentro como fuera del devenir transmigratorio: «Pese a estar sentado, vaga lejos; pese a yacer, se mueve por doquier» (Sankara, *ad Brhadaranyaka Upanisad*, I, 4, 6). Inmerso en el devenir, producido por él mismo, Prajapati aparece mortal, dividido, desmembrado, presa del miedo y de la soledad, y, por tanto, como reza la *Brhadaranyaka Upanisad* (I, 4, 1), necesitado de combatir el mal, de quemar todos los males. Por esto recibe el nombre de *Purusa*; de hecho, comenta Sankara, los males del apego y de la ignorancia impiden conseguir la naturaleza divina que es propia de Prajapati. Interpretando simbólicamente los elementos que componen la palabra, Sankara dice que Purusa indica a aquel que ha sido el primero (*purvam*) en quemar (*ausat*) todos los males que impedían la realización de su verdadera naturaleza, y que el mismo sacrificante, después de la reconstrucción de Prajapati y de la correcta celebración del rito, consigue la perfecta identidad con Purusa (Sankara, *ad Brhadaranyaka Upanisad*, I, 4, 1). La construcción del altar de fuego requiere la aplicación de las exactas reglas de carácter matemático que encontramos en los *Sulvasutra*. Los propios ladrillos, que, debidamente apilados, crean las formas requeridas, por ejemplo de un círculo o de un cuadrado, son dioses. Cada ladrillo es un dios al que invocar, reza la *Katha Upanisad* (I, 1, 15), y Mrtyu, la Muerte, que conoce bien los instrumentos para conseguir la naturaleza divina y para liberarse del temor originado por manifestarse en el mundo del devenir, enseña cuántos ladrillos utilizar, cuál debe ser su número y cuáles las modalidades de edificación del altar. Como Prajapati, también Mrtyu se sitúa tanto en el interior como en el exterior del devenir: en un caso es muerte, hambre y miedo; en el segundo, deidad salvífica que instruye sobre los poderes del fuego como medio de purificación y de ascesis.

El altar une interior y exterior: Purusa está profundamente oculto en todos los seres. No lo vemos, porque nuestros órganos sensoriales nos proyectan fuera y nos vuelven incapaces de una visión interna.[23] Agni, edificado de forma geométrica, es síntesis de interioridad y exterioridad, de mente y de naturaleza, solución matemática de una polaridad que la ciencia moderna experimentará, de manera drástica, con la crisis de los fundamentos de principios del siglo XX.

Un pasaje del *Satapatha Brahmana* (VI, 1, 3, 20) ayuda a comprender mejor cuál es la naturaleza del altar en relación con una idea de número y de forma geométrica sujetos a un proceso de crecimiento. Se especifica que el altar debe levantarse en el espacio de *un* año, y que algunos prefieren decir *dos* años. La edificación y la representación ritual deben durar un primer año en el que el altar es como una semilla destinada a germinar: «para que la semilla plantada sea productiva, yace tumbada cambiando y creciendo». Pero el crecimiento del altar debe respetar determinadas proposiciones matemáticas. Una circunstancia totalmente acorde con la visión platónica de las progresiones numéricas como modalidades de crecimiento del número conforme a la *phýsis.* En la visión platónica, el crecimiento comenzaba por el número 1, concebido como un principio generador de progresiones en el que estaba como impresa la naturaleza (*phýsis*).[24] Con estos presupuestos se elaboraron importantes procedimientos de cálculo, parte de un patrimonio global de conocimientos matemáticos en los que podríamos también distinguir los principales instrumentos para la reconstrucción y el crecimiento de Prajapati.

Nos preguntamos finalmente qué prerrogativas hacían de la matemática el instrumento más idóneo para la reconstrucción de Prajapati. Podemos aventurar una hipótesis recordando un pasaje del tratado sobre la aritmética de Severino Boezio. Todo lo que existe en la naturaleza, explicaba Boezio, debe su forma a las leyes de la matemática. Las relaciones con las que se combinan los cuatro elementos, la rotación de los ritmos temporales, las revoluciones celestes, todo se describe con los números. El altar tenía un análogo significado cosmológico. Pero el mismo número, en cuanto sujeto a variación, porque existen números de diferente naturaleza, conserva

siempre la misma sustancia, porque nunca está compuesto por entes diferentes de sí mismo.[25] En el número encontramos el principio de la inmutabilidad, la actitud para asumir todas las formas sin nunca alejarse de sí mismo. Esta era precisamente la naturaleza del dios que debía ser reconstruido.

[15] G. Scholem, *Über einige Grundbegriffe des Judentums*, Suhrkamp, Fráncfort a. M., 1970, pp. 90-91.

[16] De la propiedad de cerrado se ocupó sobre todo Dedekind, con su teoría de la recursividad, en su obra *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg, Braunschweig, 1888.

[17] Véase A. Bürk, «Das Apastamba-Sulba-Sutra», en *Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft*, LVI, 1902, p. 336. Son también muy importantes los artículos de A. Seidenberg, empezando por «The Ritual Origin of Geometry», en *Archive for History of Exact Sciences*, I, 1961, donde se citan también los estudios de G. Thibaut sobre los *Sulvasutra* de Baudhayana: «The Sulva-sútra of Baudháyana, with the Commentary of Dvárakánáthayajvan», en *The Pandit*, IX, 1874; X, 1875; N. S., I, 1876-1877.

[18] Para la definición de *gnomon*, véase el capítulo 5, donde se aclararán posteriormente las relaciones entre la geometría de los altares védicos y los algoritmos numéricos antiguos y modernos.

[19] G. Thibaut, «On the Sulvasútras», en *Journal of the Asiatic Society of Bengal*, XLIV, 1875, p. 242.

[20] Esto es un paso crucial para la historia de la matemática. Para más detalles, véase D. T. Whiteside, «Patterns of Mathematical Thought in the Later Seventeenth Century», en *Archive for History of Exact Sciences*, I, 1961, pp. 205-207.

[21] Véase, por ejemplo, G.W. Leibniz, «Historia et origo calculi differentialis (1714-1716)», en *Mathematische Schriften*, a cargo de C. I. Gerhardt, Olms, Hildesheim, vol. V, 1962.

[22] C. B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover, Nueva York, 1959, pp. 118 y ss.

[23] «El autoexistente vuelve los accesos externos (*parañci khani*) incapaces [de captarlo]: por eso [el ser identificado] ve [solo] las cosas en el exterior y no el íntimo atman» (Sankara, *ad Katha Upanisad*, II, 1, 1). Sobre el deseo extroversor (*kama*), expresión de la condición exterior, en oposición al deseo dirigido al *atman*, véase *Taittiriya Upanisad*, con el comentario de Sankara, Asram Vidya, Roma, 2006, pp. 42, 99, 114.

Es imposible no pensar, a este respecto, en Brouwer, el gran matemático holandés al que se deben algunos de los más importantes descubrimientos de la matemática del siglo XX. Brouwer fue el autor de una nueva matemática concebida como el fruto de una acción introspectiva, que, sin embargo, no prejuzgaba la objetividad de las fórmulas.

[24] Para más detalles, véase el capítulo 4.

[25] Severino Boezio, *De institutione arithmetica*, a cargo de G. Friedlein, Teubner, Leipzig, 1867, p. 12: «[...] eum quoque numerum necesse est in propria semper sese habentem aequaliter substantia permanere, eumque compositum non ex diversis [...] sed ex se ipso videtur esse compositus».

3

Fórmulas matemáticas y fórmulas filosóficas

Platón asignaba a la matemática una función dianoética, es decir, una posición intermedia entre la *dóxa*, el pensamiento o la opinión correcta y, sin embargo, diferente de la ciencia, y el *noûs*, la inteligencia suprema de los principios (*República*, 511 d). De aquí se derivan fórmulas, expresiones y formas de pensar que marcaron toda la evolución de la metafísica y de la propia matemática. Entre los términos compartidos, estaban *lógos* (discurso, pero también relación matemática) y *spermatikòs lógos*, la razón seminal de los estoicos, el principio cósmico de procreación, pero también la unidad de la que se extraían, con ingeniosos algoritmos, relaciones numéricas que se aproximan a un número racional. *Logistiké* indicaba el cálculo aritmético de las relaciones, pero también era el término para aludir a una facultad deliberativa, parecida al cálculo, inherente a la parte perdurable del alma. Las expresiones filosóficas *más y menos* y *grande y pequeño* intervienen frecuentemente en los *Diálogos* de Platón como sinónimo de lo indefinido (*ápeiron*), pero también son adecuadas para indicar la forma de aproximar los números irracionales con fracciones: procediendo en el cálculo, la distancia entre la fracción y el número irracional (no representable como fracción) se vuelve cada vez menor, mientras que el numerador y el denominador de la fracción se vuelven cada vez mayores. A mediados del siglo XV, Niccolò Cusano declaraba que la verdad no recibe ni el más ni el menos. Sus palabras deben ser leídas *in speculo mathematico*: la verdad se

encuentra en una posición central, como el eje de una balanza infinitamente oscilante que permite acercarse al punto de equilibrio con una disposición cada vez más ajustada de los pesos, pero sin que el perfecto equilibrio pueda nunca realizarse.

La vida del alma tenía forma matemática. Como parece lícito deducir de la *Ética a Nicómaco* de Aristóteles, los más y los menos, los excesos y los defectos de las aproximaciones matemáticas a un número irracional eran la contraparte de las incesantes oscilaciones que señalan nuestra vida moral, de los excesos y defectos que se disponen, como Escila y Caribdis, en torno a ese término medio en el que consiste el ideal de perfección.

La lista de fórmulas filosóficas adoptadas por la matemática puede seguir alargándose: con *antanaíresis* se designaba el método de búsqueda del máximo común divisor de dos números (el algoritmo de Euclides); los estoicos utilizaban un término parecido para designar la sabiduría visionaria. El mismo término de *antanaíresis* se parece al alemán *aufheben*, el *tollere* latino, con el que Hegel uniría los dos movimientos complementarios de la dialéctica, eliminar y conservar, y que también podría traducirse como «resolver» hacia atrás, remontándose a los principios.[26] Además, *prós ti*, en Euclides (*Elementos*, V), expresa la idea matemática de «relación», y para Tomás de Aquino esa misma idea se convertirá en la clave para comprender el sentido del concepto teológico de creación. Un presupuesto de la doctrina platónica consistía en la analogía entre leyes estructurales, esencialmente idénticas o acordes, que operan en diferentes ámbitos fenoménicos.[27] Antes de Platón, este presupuesto era compartido, por los órficos y los pitagóricos.

Dichas leyes no parecen depender de nuestro arbitrio, sino de algún tipo de necesidad intrínseca a los propios entes matemáticos. Por ello las fórmulas aparecen cargadas de fuerza hermética: tienen vida propia y se imponen por sí mismas, en contra de nuestras expectativas, determinando categóricamente la forma de nuestros razonamientos. Parecen formar parte de una *realidad exterior* a nuestra mente; quizá también por este motivo Platón no admitía en la Academia a quien no supiera geometría.

Con el tiempo, no obstante, la misma fórmula sapiencial, cuya veracidad se hallaba reforzada y justificada por la afinidad con la fórmula matemática, reivindicó su propia autonomía, manifestando la pretensión de dictar, por sí misma, las leyes imprescindibles del pensamiento. Se produjo entonces un inconveniente perceptible en las páginas de científicos modernos, Galileo entre ellos, para quienes la ignorancia de la matemática imposibilitaba toda investigación de la naturaleza. Galileo sabía muy bien que los pitagóricos y Platón admiraban el intelecto humano, llegando a considerarlo «partícipe de divinidad» (*Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo*, I) por su capacidad de entender el significado de los números: una postura que él mismo compartía. Pero también era consciente de que los misterios por los que Pitágoras era tan venerado no se podían resumir en fórmulas divulgables o vaguedades retóricas. Si los pitagóricos decían que el tres es el número de todo, porque toda cosa se halla determinada por un principio, un medio y un fin, no se podía considerar que el tres, más que el dos o el cuatro, era el número perfecto. La utilización de una fórmula sapiencial como moneda corriente, como principio aplicable para todo, convertiría el secreto de los números en una vulgar ligereza y el de la verdad en un mero estereotipo. La verdad había que indagarla, en cambio, por medio del razonamiento y de la demostración matemática. Para discernir en algunas fórmulas sapienciales una estructura aplicable en todos los campos del conocimiento, había que comprender los cálculos perfectamente, hasta los últimos detalles, y saber adentrarse en lo que Benedetto Croce llamaría burlonamente, con las palabras de Giambattista Vico, el estudio de los «ingenios diminutos».[28]

Y sin embargo, en última instancia, el tipo de razonamiento que inauguraba la ciencia moderna seguía sirviéndose de intuiciones existentes en las fórmulas platónicas y pitagóricas. El propio Galileo no excluía en absoluto esta eventualidad. El estudio de la caída de los cuerpos, del que dependió el desarrollo de la dinámica, lo llevó a servirse de un esquema existente desde los orígenes de la matemática e íntimamente ligado a la naturaleza de la continuidad: la existencia de un caso de igualdad

comprendido entre el «mayor» y el «menor» (*Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo*, I).

Análogos paradigmas de pensamiento, basados en un principio de continuidad, parecen perfilarse ya en la antigua aritmética mesopotámica,[29] y es verosímil que inspiraran el concepto euclidiano de relación y de proporción (*Elementos*, V): la relación de magnitudes conmensurables o inconmensurables como una entidad comprendida entre una serie de relaciones numéricas más pequeñas y una serie de relaciones numéricas más grandes. Los métodos para resolver numéricamente una ecuación se han basado siempre en un esquema análogo y, para subrayarlo, un algoritmo conocido desde la Antigüedad más remota, la llamada *regula falsi*, era denominada «regla de los platos de la balanza» por los matemáticos árabes.[30] El valor buscado de la incógnita era el eje, y en él se encontraba el invisible punto de equilibrio de una indefinida oscilación de aproximaciones numéricas por exceso y por defecto.

La balanza de brazos desiguales, el principio de la palanca por el que magnitudes conmensurables se equilibran a distancias inversamente proporcionales a sus pesos, fue estudiado por Arquímedes, quien por otra parte se sirvió de la imagen de la balanza en los razonamientos heurísticos que precedían a la demostración más rigurosa. En el caso de la cuadratura de una parábola, el método heurístico, de naturaleza mecánica, consistía en equilibrar partes de una figura, que completaba la de un segmento de parábola P y de un triángulo inscrito T (con la misma base y altura), con las partes de otra figura cuyas medidas eran conocidas. Se demostraba al final que el área del segmento parabólico P es 4/3 del área del triángulo inscrito T.

El método por agotamiento, del que se servían Euclides y Arquímedes, se basaba en los excesos y defectos que aproximan una igualdad. Para demostrar que los círculos están entre sí como los cuadrados construidos sobre diámetros (*Elementos*, XII, 2), Euclides se refiere a dos secuencias de polígonos, respectivamente inscritos y circunscritos en un círculo, cuyas áreas se aproximan a la del círculo por defecto y por exceso. El círculo está en el medio y corresponde a una igualdad ideal, y también imposible, entre

el polígono inscrito y el circunscrito. La posibilidad de acercarse indefinidamente a dicha igualdad ideal, haciendo crecer el número de lados de los polígonos, permite demostrar la tesis.

La sugestión y la eficacia de la imagen de la balanza se extendían hasta las divinidades del Olimpo, porque Zeus utilizaba la balanza para sopesar las suertes de la guerra de Troya y Atenas, y también para hacer justicia en el juicio a Orestes, situándose como un centro de decisiones entre deliberaciones opuestas.

Los modelos algorítmicos a gran escala para resolver un sistema de ecuaciones o para calcular el mínimo de una función se siguen basando en la misma idea que inspiró a los matemáticos en civilizaciones antiguas, como en Mesopotamia (en torno al 1800-1700 a. C.) o en la India védica. Una tablilla babilónica (YBC 7289), analizada por Otto Neugebauer y por Abraham Sachs, muestra un cuadrado con sus diagonales y unos números que hacen presumir el conocimiento, en Mesopotamia, de aproximaciones cuidadosas, por exceso y por defecto, de la raíz cuadrada de 2. Un conocimiento heredado después, suponía Neugebauer, por los matemáticos indios.

El principio de continuidad utilizado por Galileo para estudiar el movimiento de los cuerpos, a partir del cual comenzó en el siglo XVII la moderna revolución del método científico, se encuentra ya prefigurado en los cálculos mesopotámicos y en la matemática védica. Sin el conocimiento puntual de aquellos cálculos no hubiera existido el saber de los antiguos y tampoco la ciencia moderna y el cálculo del último siglo; y quizá tampoco la metafísica que desde el antiguo pitagorismo, a través de los platónicos, se desarrolló a lo largo de los siglos en Occidente.

La razón de todo esto se encuentra en las simples operaciones que presumiblemente permitieron al escriba aproximar el número $\sqrt{2}$. Dichas operaciones parecen dictadas, según Neugebauer y Sachs, por la idea de construir una sucesión indefinida de intervalos cada vez más pequeños, uno incluido en el otro y con los extremos identificados por números racionales, cada uno de los cuales contiene $\sqrt{2}$. El número irracional $\sqrt{2}$ se configuraría entonces, a partir de los cálculos mesopotámicos de la época antigua, como

un ente matemático definido por una secuencia de intervalos que lo contienen. En Grecia se concebirían estrategias análogas para aproximar las relaciones entre magnitudes inconmensurables mediante relaciones entre enteros, y la misma definición de número real, a finales del siglo XIX, se valdría de esquemas de cálculo parecidos a los mesopotámicos. Neugebauer parece ser totalmente consciente de esta derivación. Finalmente, se puede constatar que el hipotético algoritmo que permitiría al escriba aproximar √2 es el caso particular del método general, puesto a punto entre los siglos XVI y XVII para resolver numéricamente una ecuación algebraica de cualquier grado. Un método que no solo sirve para aproximar un número irracional, sino que es también una suerte de *clavis universalis*, una estrategia fundamental del análisis y del pensamiento matemático de todos los tiempos.[31]

[26] I. Thot, *I paradossi di Zenone nel «Parmenide» di Platone* (1994), Bibliopolis, Nápoles, 2006, p. 18.

[27] K. Gaiser, *La dottrina non scritta di Platone*, Vita e Pensiero, Milán, 1994, p. 15 (ed. orig. *Platons ungeschriebene Lehre*, Klett, Stuttgart, 1963).

[28] Para el uso de esta expresión por parte de Croce, sobre todo en su polémica con Enriques, véase L. Russo y E. Santoni, *Ingegni minuti: una storia della scienza in Italia*, Feltrinelli, Milán, 2010.

[29] O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity* (1951), Dover, Nueva York, 1969, p. 35.

[30] A. P. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes (VIII-XV siècles)*, Vrin, París, 1976, p. 47.

[31] El método que posiblemente guiará al escriba se resume en la fórmula iterativa $x_{k+1} = (x_k + y_k)/2$ siendo $x_0 = 3/2$ e $y_k = 2/x_k$, con k que adopta los valores 0, 1, 2... . El número √2 es entonces mayor que y_k y menor que x_k. Es decir, el intervalo $[y_k, x_k]$ incluye √2 para todo k y disminuye al aumentar k. La fórmula es una reescritura de la que Newton y Raphson utilizarían en el siglo XVII. Véase *Mathematical cuneiform texts*, a cargo de O. Neugebauer, A. Sachs, A. Goetze, American Oriental Society and American Schools of Oriental Research, New Haven (Conn.), 1945, pp. 42-43; D. H. Fowler, E. Robson, «Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289

in Context», en *Historia Mathematica*, XXV, 1998; N. Mackinnon, «Homage to Babylonia», en *The Mathematical Gazette*, LXXVI, 1992.

4

Aumento y disminución
Número y *phýsis*

La geometría de los altares védicos obligaría, a largo plazo, al estudio de la relación que existe entre número y figura geométrica. La relación *recta-número* se hallaba conectada con las magnitudes inconmensurables y con la resolución de las ecuaciones algebraicas, mientras que la relación *curva-recta* conduciría a los métodos por agotamiento, al cálculo infinitesimal y al estudio de números trascendentes como *e* o π.[32] En ambos casos, la matemática tuvo que afrontar la irrealidad del infinito, que podía arrastrar a la insensatez o a la falsedad de cualquiera de nuestros contactos con el mundo.

Una circunstancia decisiva es además la siguiente: a partir de los dioses se impuso describir cómo varían las magnitudes, cómo aumentan y cómo disminuyen. El aumentar y el disminuir ponían en peligro la misma esencia de las cosas, el *tò tí ên eînai*, según la fórmula aristotélica (*Metafísica*, 983 a 27-28), el *quod quid erat esse*: «el hecho, para algo, de seguir siendo lo que era».[33] Evidentemente, el propio fundamento de la metafísica requería de forma implícita una explicación de cómo cualquier ente, pese a estar sujeto a cambio, puede conservar sus rasgos esenciales. El ente debe poder ser reconocido, y dicho reconocimiento es el presupuesto para establecer su definición (*horismós*, *lógos*).

La cuestión del crecimiento, extendida en las culturas antiguas, tenía aspectos cosmológicos relacionados con el movimiento del sol y de la luna.

Para los órficos, indica Proclo (*Comentario a la República de Platón*, II, 58, 10 -11), «todo el ciclo del año se divide en crecimiento y disminución». Los astros, sobre todo la luna, producían una análoga oscilación de crecimiento y decrecimiento en la vida terrestre: la luna mueve a todos los seres sublunares y, gracias a sus potencias, produce en todos ellos aumento y disminución (*Comentario al Timeo de Platón*, II, 87, 20 -28, 12).

El crecimiento se inscribía en el tema más amplio del cambio y de la pérdida de identidad en el curso del devenir. De esto habló el poeta y dramaturgo siciliano Epicarmo (siglo v a. C.), uno de los primeros testimonios de la doctrina de Pitágoras. Jámblico refiere que el dramaturgo se abstuvo de filosofar abiertamente y prefirió presentar las ideas de Pitágoras bajo forma de juegos, de representaciones teatrales (23 A 4 DK). Epicarmo fue uno de los primeros en plantear en la comedia la cuestión de hasta qué punto está presente en el fenómeno del crecimiento lo que los griegos llamaban *állo*, lo que es siempre otro, diferente, semejante a materia informe y mudable, corriente inestable e irreal. A sus personajes, como más tarde al viejo Estrepsiades en las *Nubes* de Aristófanes, se les pedía pagar una deuda contraída años antes, pero ellos negaban ser deudores, porque no eran la misma persona que antes: una argumentación que se diría sofística. Un fragmento lo explica de forma explícita (23 B 2 DK):

Así ahora considera
también a los hombres: de hecho, unos crecen mientras que otros se consumen:
todos, en suma, cambian durante todo el tiempo.
Ahora, lo que cambia por naturaleza, y nunca permanece en el mismo lugar,
sería ya diferente de lo que era.
Y tú, en verdad, y yo ayer éramos unos y hoy otros,
y otros diferentes también mañana, y nunca los mismos, según idéntica ley.

El cambio existe, pero acontece según una ley (*lógos*). Se puede especular que dicha ley tiene un significado matemático y que depende precisamente de la noción de relación, por medio de la cual se conectan cosas diferentes, o partes diferentes de la misma cosa. Una primera confirmación la recibimos de Aristóteles, que afirmaba (*Meteorología*, 379 b-380 a) que «durante todo el tiempo que persiste una determinada relación (*lógos*), la naturaleza (*phýsis*) de una cosa permanece invariable». A esta duración o invariancia durante un cambio siempre ha aspirado tanto la matemática (empezando por Pitágoras y por los *Sulvasutra*) como, a lo largo de los siglos, la filosofía platónica que se inspiró en ella.

El crecimiento puede ser ilimitado, lo mismo que el decrecimiento. Si no hay límite, con el crecimiento se va hacia lo infinitamente grande y con el decrecimiento hacia lo infinitamente pequeño, y en ambos casos acaba prevaleciendo el no ser del *ápeiron*, el ente se sustrae a nuestra capacidad de pensarlo, se vuelve indefinible. Pero no es solo el infinito lo que determina esta suerte de aniquilación. En tiempos más recientes se ha comprobado que un ente matemático roza la indefinición también a lo largo de un proceso finito de cálculo, a causa de un crecimiento anómalo e incontrolado de los números.

Si pensamos en Grecia, un concepto fundamental, para todo lo que se refería al crecimiento de las magnitudes, era el de naturaleza, en griego *phýsis*. Pero traducir *phýsis* por «naturaleza», sin añadir nada más, sería desviarse. Aristóteles (*Metafísica*, 1014 b 16-1015 a 19; *Física*, 193 a 28-193 b 21) dice mucho más, pasa revista a varios significados, y observa que la naturaleza debe relacionarse, ante todo, con las ideas de crecimiento y de procreación. La naturaleza, afirma Aristóteles, es «el elemento primero inmanente del que procede lo que crece» (*Metafísica*, 1014 b 17-18); y también «un principio y una causa de movimiento y de reposo para aquello en lo que reside primariamente y por sí misma, no por accidente» (*Física*, 192 b 20).

El concepto aristotélico de naturaleza parece moverse en dos direcciones distintas, una relacionada con teorías materialistas anteriores y la otra con una idea de movilidad gobernada por la forma (*morphé*) y por el *lógos*. Con

respecto a la primera, algunos filósofos, recuerda Aristóteles, sostienen que la naturaleza y la realidad (*ousía*)[34] de sus productos reside en su materialidad (*Física*, 193 a 10-12). El término utilizado por Aristóteles para referirse a esta materialidad es *prôton arrýthmiston*, el primer elemento constitutivo, todavía carente de forma, de una cosa, como la madera de una cama o el bronce de una estatua. *Arrýthmiston*, mal proporcionado, sin ritmo, es la negación de *rythmós*, término que une las nociones de movimiento y de forma y que, antes de adoptar el significado de «ritmo», podría significar, de modo más general, la forma asumida por lo que es móvil, fluido y modificable (Chantraine, Benveniste).

Aristóteles recuerda, por tanto, el significado de *phýsis* como fondo de donde provienen las cosas todavía carentes de forma e incapaz, por sí mismo, de sufrir un cambio que lo haga salir de su propia virtualidad o potencia (*dýnamis*). La naturaleza se puede entender, explica, en el sentido de *hýle*, la *silva* latina, que después será la materia opuesta a la forma. Pero a esto Aristóteles opone otro punto de vista, según el cual podríamos concebir una idea de naturaleza basada en la forma (*morphé*) y en el aspecto que se muestra según el *lógos* (*tò eîdos tò katà tòn lógon*).

La confrontación entre las dos concepciones es un punto destacado en la historia de la idea de naturaleza. Heidegger lo resaltó, comentando que la visión de una naturaleza como *hýle*, como materia, tenía el efecto de quitar al movimiento todo carácter de invariancia y de permanencia. Si la materia de las cosas es el agua, el fuego o la tierra, si los elementos constitutivos son solo átomos, entonces el flujo y el movimiento de la *phýsis* responden a los principios de fugacidad y de inconsistencia. Con arreglo a esta visión, «todo lo que tiene carácter de movimiento, toda alteración y todo estado variable (*rythmós*), será lo que le sucede al ente solo accidentalmente; al ser algo inestable, el movimiento es no-ente».[35]

¿Qué era entonces, por el contrario, la naturaleza como movimiento y crecimiento en la forma, como *rythmós*, como figura o apariencia conforme al *lógos*? El propio Heidegger recuerda que, en el lenguaje de los matemáticos, *lógos* remite a la idea de relación y conexión, que *lógos* es el sustantivo de *légein*, que significa en primer lugar ‘recoger realizando una

elección’ y por lo tanto, podríamos añadir, seleccionar operaciones separadas individuales para formar una sola, retomar y unir con los números, llevar con el número «a unidades varias cosas diseminadas».[36] ¿Cómo actúa la matemática con los números y con las relaciones? La relación une dos magnitudes separadas, las convierte, por decirlo así, en una sola que consiste en el procedimiento con el que se busca una medida común de ambas. De forma análoga, una ecuación une diferentes magnitudes en una misma fórmula; el concepto matemático de conjunto aspira a reunir cosas diferentes en una sola colección; el mecanismo de la recursividad reúne diferentes operaciones, por ejemplo, todas las posibles sumas entre números, en un único concepto de cooperación, la *suma*.

El discurso aristotélico se refiere, pues, indirectamente a la metamorfosis, a la cuestión del cambio de identidad durante la mutación y a la posibilidad de sustraerse a la accidentalidad del devenir por medio de configuraciones relativamente estables donde prevalecen *lógos* y *morphé*. Todas las cosas se convierten en imágenes errabundas, recita el Pitágoras de Ovidio (*Metamorfosis*, XV, 178): *cuncta fluunt omnisque vagans formatur imago*. Pero si se atiende a los números y a las figuras geométricas, queda claro que el cambio puede ser regulado por una relación, y que se puede hacer crecer una magnitud sin alterar su forma. Solo si la forma permanece estable es posible el reconocimiento de los procesos de crecimiento: lo que era antes sigue siéndolo ahora. Aún más significativa se vuelve, por tanto, la tesis aristotélica según la cual la permanencia de una relación (*lógos*) garantiza la invariancia de la naturaleza (*phýsis*) de una cosa.

Un pasaje de Platón nos desvela hasta qué punto la estabilidad de las formas se podía considerar una prerrogativa divina (*República*, 380 d):

> ¿Qué decir, entonces, de esta otra ley (*nómos*)? ¿Crees acaso que el dios es una especie de mago, capaz, por el gusto de engañarnos, de aparecer ante nosotros una vez de una forma, otra vez de otra, o cambiando su aspecto (*eîdos*) en una multitud de figuras diferentes, o bien, con el fin de confundirnos, suscitando la impresión de que él es así?

Ese «cambiando su aspecto en una multitud de figuras diferentes (*alláttonta tò autoû eîdos eis pollàs morphás*)» expresa el drama de la metamorfosis, y se plantea como la antítesis, inconstante y cambiante, del rostro divino. Por el contrario, el dios se presenta como un ser reconocible y real, como en las epifanías de Artemisa en lo alto de los montes de las que habla Homero en la *Odisea* (VI, 102-109).[37] Entonces, el *eîdos*, la visión esperada, lejos de parecerse a la idea elusiva y espectral de los empiristas modernos, no es engaño o magia, sino experiencia exacta y verídica, y por eso no puede descomponerse en un flujo de imágenes incoherentes y divergentes. Todo crece, disminuye y se transforma en el flujo de la *phýsis*, pero el dios muestra inalterado su rostro. Seguramente por este motivo se buscaban relaciones de equivalencia entre las diferentes figuras geométricas, y el altar del dios, tanto de Apolo en Grecia como de Agni en la India, debía poderse agrandar manteniendo inalterada la forma. La matemática se encargaba de hacer posible esta invariancia, un presupuesto del reconocimiento de la figura divina. Proteo, el gran Viejo del mar, sujeto a continuas metamorfosis, no es una excepción a la regla, porque alude por contraste a un principio de veracidad: emerge aquí y allá de la pluralidad indistinta de las olas del mar, correlato de su mutabilidad, con la misma intensidad y precariedad con la que se puede captar en el mar de la existencia, en un instante, la inmutabilidad del Bien platónico.[38] Homero asignaba a Proteo, por otro lado, el conocimiento del número y de los conteos (*légein*) numéricos (Odisea, IV, 411-413).

Pero crecimiento y disminución no eran solamente procesos genéricos; podían referirse a fenómenos de expansión y de contracción generados por un núcleo inicial, por una forma originaria que se mantiene invariable desde el principio. Esta circunstancia permitía unir la *phýsis* con la matemática. De aquí nació una *técnica* del crecimiento (o de la disminución) destinada a perpetuarse a lo largo de los siglos, una técnica que es reconocible incluso en la *computatio* algebraica más avanzada.

En Grecia, el problema del agrandamiento de las figuras geométricas se repite en varias anécdotas. Por la carta de Erastótenes al rey Tolomeo sabemos que Minos debía duplicar una tumba real con forma de cubo, y que

la construcción en Delos de un altar cúbico doble que el existente fue prescrita, para poner remedio a una peste, por el oráculo de Apolo. También el célebre Coloso de Rodas debía ser duplicado. No existe, en Grecia, un tratado sobre el tema del crecimiento de las figuras geométricas, pero a las anécdotas de la tradición griega se añade una circunstancia no accidental, que deja emerger con más claridad una conjetura sobre los orígenes de la matemática: la combinación sistemática de matemáticas y religión en el pensamiento ritual de la India védica. El tema del agrandamiento de los altares en los *Sulvasutra* permite descifrar el significado de lo que sucedió en Grecia.

El significado de la duplicación del cubo, explicaba Eratóstenes, se encontraba en la idea del crecimiento de las formas. Se trataba de desarrollar, a partir de un núcleo inicial, una progresión indefinida de figuras en escala creciente. El crecimiento es siempre *en otro*, es movimiento que enajena y aleja, pero puede también realizarse en secuencias de figuras semejantes. La técnica de crecimiento de una figura geométrica permite precisamente construir, a partir de un triángulo o de un cuadrado, una figura mayor que sigue siendo un triángulo o un cuadrado. Seremos capaces, por regla general, explica Erastótenes,

> de transformar en cubo cualquier figura sólida asignada que esté delimitada por paralelogramos, o bien hacerla pasar de una forma a otra (*ex hetérou eis héteron*) y hacerla parecida [a una figura dada] y ampliarla (*epaúxein*) respetando el parecido, y esto incluso cuando se trate de altares y de templos... Pero mi invento será útil también para aquellos que quieran aumentar (*epaúxein*) las dimensiones de las catapultas y de las [otras] máquinas balísticas, en las que todo debe crecer (*auxethênai*) en proporción, espesor y longitud, si queremos que su alcance crezca (*auxethênai*) en proporción.[39]

Para Platón la matemática servía sobre todo para «facilitar la radical conversión del alma desde el mundo del devenir al de la verdad y el ser» (*República*, 525 c), pero también decía que en las progresiones numéricas

se encontraba como impresa la *phýsis*, la naturaleza. Ambas consistían típicamente en un flujo, en una génesis progresiva de formas partiendo de una «semilla» capaz de ampliarse y reproducirse de forma ilimitada. El problema de la duplicación de un cuadrado propuesto en *Menón* tenía, presumiblemente, este significado: no solo ejemplificar un proceso de aprendizaje por medio de la *anámnesis*, sino también reproducir en figuras ideales la propulsión de la *phýsis* en un crecimiento potencialmente infinito de formas semejantes.

La *phýsis* debe relacionarse con la concepción platónica de punto geométrico, entendido, recuerda Aristóteles (*Metafísica*, 992 a), como punto inicial, principio generador de la línea. Platón no aceptaba la idea de punto como mínimo estático, como parte constituyente de una línea o de un volumen. A. E. Taylor advierte justamente que aquí se expresa de forma velada el concepto que vuelve a emerger más tarde, en el platonismo griego, de una línea entendida como *fluxión* (*rhýsis*) de un punto, un término que Newton introducirá en la lengua inglesa para expresar la idea central del cálculo que se estaba desarrollando en el siglo XVII. Newton consideraba la matemática un método, más que una explicación efectiva de las cosas, y por tanto evitaba toda definición que explicara la naturaleza del *movimiento instantáneo*. Sin embargo, no evitó este concepto y lo convirtió en la base de su tratado *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, escrito en 1671 y publicado en 1736.[40] En este tratado, Newton describía las cantidades variables no como agregados de elementos infinitesimales, sino como entidades generadas por el movimiento continuo de puntos, líneas y superficies, y llamaba *fluxión* (*fluxion*) a la velocidad instantánea de generación. En el caso más simple, el término *fluxión* denotaba la velocidad instantánea de un punto que se mueve a lo largo de una línea. Sucesivamente, después de 1690, Newton intentó dar pleno rigor a la teoría de las fluxiones, definiendo sus conceptos principales en los términos de una geometría analítica cuya supremacía reivindicaba respecto a otras disciplinas. Propuso entonces dos definiciones que explican mejor si cabe la importancia de las ideas de crecimiento y disminución para la historia global del pensamiento científico en Occidente:

1. *fluens est quod continua mutatione augetur vel diminuitur*,
2. *fluxio est celeritas mutationis illius*.[41]

Por tanto, *fluens* era lo que aumenta o disminuye a causa de un movimiento continuo, y *fluxio* era la velocidad de ese movimiento. Los conceptos fundamentales del análisis se originaban, con Newton, en las ideas de crecimiento y de disminución confrontadas en el momento de su aparición. No sería hasta más tarde, en el siglo XIX, cuando se impuso una concepción completamente diferente de las ideas fundamentales del cálculo, no de carácter dinámico, sino estático y atomista. El infinito potencial y dinámico representado en los formalismos del cálculo diferencial del siglo XVII fue sustituido, gracias a un concepto riguroso de *límite*, por un infinito existente que se esperaba que fuera más idóneo para dar a la continuidad una existencia *real*.

Para Platón, como para los pitagóricos que lo habían precedido, el número hacía posible una suerte de actividad unificadora de la conciencia respecto a la multiplicidad de las percepciones. Sería inverosímil, se dice en el *Teeteto* (184 d), que la multiplicidad de las percepciones particulares residiera en nosotros de forma difusa, sin converger «hacia una única forma determinada, sea esta un alma o como se la quiera llamar, con la cual percibimos lo que es perceptible».

¿Cómo actúa el alma? El ser que acompaña todas las cosas, dice Platón en el *Teeteto* (186 a-b), es precisamente aquello a lo que tiende el alma de por sí, estableciendo relaciones (*analogízein*) entre cosas antitéticas y comparando en sí misma el pasado y el presente con el futuro. Así pues, una función del alma consiste en establecer un nexo entre dos percepciones distintas que se suceden en el tiempo, y el nexo ideal es entonces lo que hace reconocer la *misma* cosa en su mudarse en *otra*. Inteligible es solo lo que, a pesar de ser mudable, sigue siendo reconocible. A falta de una ley numérica que permita la detectabilidad del ente mutable, el flujo de las percepciones degenera en un caos sin remedio.[42]

Ahora con la matemática se puede pensar en comprender la existencia de un nexo estable entre percepciones distintas. Entre los matemáticos del siglo pasado, lo intuyó perfectamente Brouwer, para quien el primer fenómeno a partir del cual adquiere forma el pensamiento es una sucesión temporal en la que nuestra conciencia retiene una primera sensación en el acto de transitar a una sensación sucesiva. Para Brouwer, el fenómeno se repite iterativamente y nuestra conciencia, distinguiendo la sensación pasada de la presente, y retirándose de ambas, origina la actividad en nuestra mente. Una forma matemática de este proceso consiste precisamente en procedimientos de cálculo iterativo, en los que la variable se acerca a la solución de un problema con una sucesión de valores aproximados, calculado cada uno de ellos por el anterior por medio de la aplicación repetida de un operador. Por cierto, Norbert Wiener pensó en análogos mecanismos iterativos en la simulación del comportamiento de los organismos vivos, sobre todo en el caso en el que intervenían fenómenos de retroacción (*feedback*). Aferrar un objeto, observaba, consiste en reducir progresivamente la distancia residual entre el valor de la variable y la solución buscada.

[32] Con estos dos únicos puntos principales, intuía S. Weil (*Cahiers*, in *Œuvres complètes*, cit., vol. VI, tomo I, 1994, p. 129; trad. it. cit., vol. I, 1982, pp. 170-171), se puede seguramente relacionar cualquier cosa en matemática.

[33] Así según la traducción de E. Bréhier, citado en Aristóteles, La Métaphysique, a cargo de J. Tricot, Vrin, París, 1970, vol. I, p. 23.

[34] Chantraine traduce ousía por ‘realidad’, ‘sustancia’, ‘esencia’.

[35] M. Heidegger, «Vom Wesen und Begriff der Phýsis. Aristoteles, Physik B 1» (1939), en Gesamtausgabe, Klostermann, Fráncfort a. M., vol. IX: Wegmarken, a cargo de F. W. von Herrmann, 1976, p. 272 (trad. it. «Sull’essenza e sul concetto della “Phýsis”. Aristóteles, “Fisica”, B, 1», en Segnavia, a cargo de F. Volpi, Adelphi, Milán, 1987, p. 226).

[36] Ibid., pp. 278-279 (trad. it. cit., pp. 232-233).

[37] K. Kerényi, Dionysos (1976), Klett-Cotta, Stuttgart, 1994, p. 25 (trad. it. Dioniso, Adelphi, Milán, 1992, p. 34).

[38] Numenio, fr. 2 Des Places.

[39] Arquímedes, De sphaera et cylindro, II, p. 65, rr. 15-16 Mugler.

[40] C. B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, cit., pp. 193-194.

[41] Para dichas definiciones se pueden consultar los manuscritos inéditos en la Cambridge University Library (CUL). Véase en particular CUL, Newton Papers, ms. Add. 3963, f. 47r. Para un discurso más amplio, véase D. T. Whiteside, *Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century*, cit., p. 375.

[42] En el pensamiento platónico, el alma tiene este significado de principio de mantenimiento y de cohesión de los cuerpos, que de lo contrario estarían sujetos a un incesante cambio y finalmente a una auténtica desintegración. Véase Numenio, fr. 4b Des Places.

5

Katà gnómonos phýsin

Ahora bien, ¿cómo se piensa el número con el fin de que lleve a cabo su cometido de conectar las percepciones dentro del alma? El número puede ser pensado de diferentes maneras, pero es en un fragmento de Filolao donde se dice cuál es la manera adecuada, la que corresponde a la capacidad de nuestro pensamiento, y esta manera es el origen de los algoritmos iterativos de la matemática. El número, se lee en el fragmento, «armonizando todas las cosas con la percepción en el interior del alma, las hace conocibles y entre ellas conmensurables según la naturaleza del gnomon (*katà gnómonos phýsin*), porque compone y descompone las relaciones entre las cosas, tanto de las ilimitadas como de las limitantes» (44 B 11 DK). Aquí encontramos todos los elementos decisivos: el número, el alma, las cosas (*prágmata*), la percepción, la cognoscibilidad, las relaciones, lo finito, lo infinito y, por último, la naturaleza del gnomon. El gnomon, explicaría Herón de Alejandría (*Definiciones*, 58), es aquella figura que, aplicada a una forma geométrica dada, genera otra similar a la primera. Los números pitagóricos eran puntos dispuestos en un determinado *orden geométrico en el espacio*, y su crecimiento estaba sujeto a la naturaleza del gnomon. El número 4 consistía en cuatro puntos dispuestos en un cuadrado; rodeándolos con un gnomon de 5 puntos dispuestos en escuadra, se obtiene el número cuadrado sucesivo, es decir, el 9. Del mismo modo se obtienen 16, 25, 36, 49..., añadiendo, cada vez, un número impar de puntos dispuestos en escuadra. Gracias a la traducción de los *Sulvasutra*

de Baudhayana, realizada por George Thibaut en los años setenta del siglo XIX, se puede conocer perfectamente la analogía entre los ladrillos de los altares védicos y los números pitagóricos. La prescripción para la construcción del altar de Agni era la siguiente: empezar con un pequeño cuadrado de cuatro ladrillos; después, añadir cinco ladrillos, continuar con un cuadrado de 9, y, por último, añadir 7 ladrillos más, con un cuadrado de 16.[43]

Quien establecía las medidas del altar concebía, resulta evidente, el crecimiento potencialmente infinito de la serie de números cuadrados.

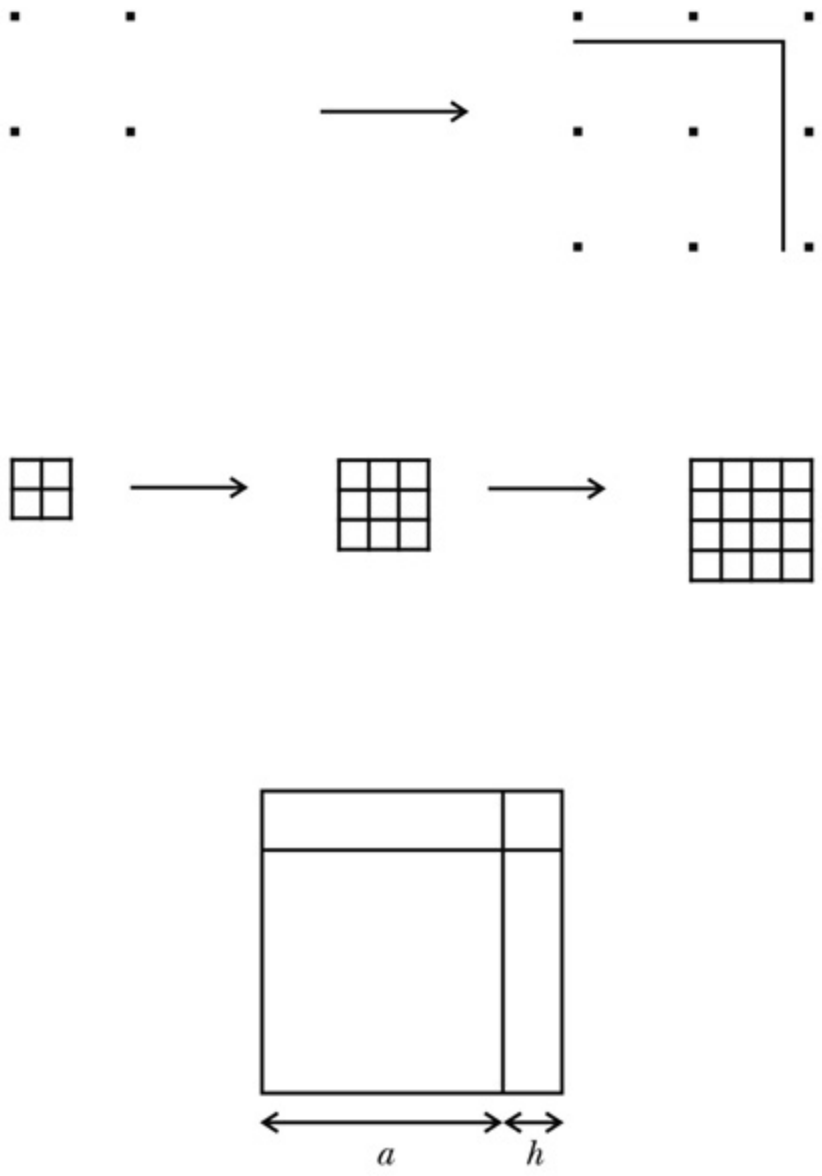


Figura 2

¿Por qué esta forma de disponer los números cumple el objetivo preestablecido de hacer cognoscibles las cosas? Para entenderlo conviene reproducir en el continuo geométrico la idea del aumento mediante gnómones, aplicándola concretamente a la figura del cuadrado. La imagen de tal aumento le servía a Euclides para demostrar la versión *geométrica* de la fórmula *algebraica* del cuadrado de un binomio: dividiendo una línea

recta en dos segmentos, a y h, el cuadrado de lado $a + h$ es igual al cuadrado de lado a más el cuadrado de lado h más dos veces el rectángulo de lados a y h, teorema que se expresa en la simple fórmula del aumento del cuadrado propuesta en los *Sulvasutra* de Apastamba: $(a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$. Newton y Raphson se servirán de esta fórmula para resolver numéricamente una ecuación cuadrática como es $x^2 - 2 = 0$. Haciendo $x = a + h$, siendo a una aproximación inicial de $\sqrt{2}$, y despreciando h^2, la ecuación anterior se convierte en $a^2 + 2ah = 2$, de donde $h = -(a^2 - 2)/2a$. Y de aquí el método iterativo $x_{k+1} = xk - (xk^2 - 2) / 2x_k$, donde $k = 0, 1, 2, ...$, y $x_0 = a$.

El teorema de Euclides (*Elementos*, II, 4) significa mucho más de lo que afirma, y cabe preguntarse hasta qué punto el propio Euclides era consciente de ello. El sentido de la expresión *katà gnómonos phýsin* en el fragmento de Filolao está relacionado con el significado fundamental de *phýsis* como «crecimiento, y, de hecho, Euclides nos dice en realidad cómo crece un cuadrado si se incrementa su lado a con un segmento h. Interpretado de este modo, el sentido del teorema cambia radicalmente. Los segmentos a y h no son equivalentes, porque h se interpreta como un incremento de a. De aquí parte el análisis: en general, nos preguntamos, ¿cómo varía el valor de una función $f(x)$ si x sufre un incremento h? Euclides (II, 4) nos muestra el caso de la simple función $f(x) = x^2$, y nos preguntamos cómo varía el cuadrado de x al variar x. Pero el problema es completamente general: se trata de saber cómo aumenta (o disminuye) una magnitud A que depende de otra magnitud B cuando esta última aumenta o disminuye. La primera respuesta exhaustiva a esta pregunta se encuentra en el célebre tratado *Methodus incrementorum directa et inversa* (Londres, 1715), en el que Brook Taylor introducía una fórmula que expresa cómo varía una función $f(x)$ si la variable x sufre pequeños incrementos. Lagrange definiría posteriormente la fórmula de Taylor como el principio fundamental del cálculo diferencial. En una dirección o en otra, los incrementos de x pueden determinar el decrecimiento de la función f, y se obtiene así un tipo de métodos para buscar el valor de x que hace que el valor de f sea mínimo. Se puede medir la importancia de este hecho a través

de las célebres palabras de Leonhard Euler, para quien la perfección del universo se expresaba en la circunstancia de que en el mundo nada sucede sin que intervenga alguna regla de mínimo o de máximo.

Es difícil imaginar cómo, a falta de tal dispositivo analítico, se puede medir el efecto perturbador que sufre una magnitud a consecuencia de la alteración de otra. En las fórmulas del análisis se encuentran los primeros instrumentos para estudiar la estabilidad de un sistema de cálculo en presencia de errores perturbadores sobre los datos y sobre operaciones individuales. La fórmula del cuadrado del binomio permite considerar dos momentos sucesivos en el cambio, de a a $a + h$, y hallar, a partir de un cuadrado inicial, otro cuadrado. Esta circunstancia implica una estabilidad, una invariancia en el cambio en la que se basa el *epistéme*, poder detener la mente en algo. La mutación no es solo en otro (*eis állo*), el devenir no es solo no ser. En esta visión la *phýsis* se convierte en un flujo de generación iterativa de formas semejantes, o al menos nos convencemos de que pueda serlo y estudiamos los casos en los que efectivamente lo es. Pero aquí ya se anuncia un cálculo algebraico, basado en el crecimiento de las figuras geométricas, en el que los fenómenos de crecimiento y de generación de la *phýsis* podrían encontrar una representación matemática. También en la experiencia común es válida la misma ley: si no hay repetición, escribiría Proust, prevalece la irrealidad.[44] Los métodos que Viète, Newton y Raphson idearon, a partir de la fórmula del cuadrado del binomio, para resolver de forma numérica una ecuación algebraica son merecidamente famosos. Fue la máquina más potente y eficaz que la matemática reelaboró, en época moderna, para resolver ecuaciones y calcular el mínimo de una función, siguiendo las huellas de antiquísimas reglas computacionales. Se remonta a hace pocas décadas la demostración de que el método de Newton para aproximar la raíz cuadrada de un número tiene la máxima eficiencia posible, medida en términos de velocidad de convergencia y de complejidad computacional. Y es igualmente reciente el desarrollo de métodos para el cálculo del mínimo de una función que generalizan el esquema de Newton.[45]

Sin embargo, a partir de ahora, no se puede obviar una circunstancia crucial, que se representa en el cálculo digital de muchas otras formas y que es una de las causas principales de la inestabilidad de los algoritmos numéricos. En las fracciones *p/q* generadas con el método de Newton para aproximar la raíz de una ecuación, el numerador *p* y el denominador *q* pueden crecer rápidamente más allá de los límites tolerables, con el consiguiente aumento del costo computacional y con la pérdida de información debida a operaciones de redondeo.[46] En el cálculo de raíces cuadradas o cúbicas, el crecimiento de los números está relacionado con el crecimiento o decrecimiento de una figura geométrica mediante sucesivas correcciones gnomónicas y, en la lógica originaria del procedimiento, con una disminución progresiva de la unidad de medida.

En el mismo esquema de los métodos de Viète y de Newton se basan hoy las estrategias de optimización numérica para calcular mínimos y máximos de funciones. Y de esas mismas estrategias dependen también los procesos de aprendizaje automático con redes neuronales, que se basan en el cálculo de parámetros para reducir progresivamente la divergencia entre la respuesta calculada y la esperada. En ese sentido, el aprendizaje, o, mejor dicho, el modelo de aprendizaje realizado por la red neuronal, es conceptualmente idéntico a un proceso de minimización. Pero el cálculo analítico no es siempre capaz de garantizar el éxito de la operación. En los procesos automáticos de aprendizaje, pueden producirse a menudo crecimientos incontrolados de valores numéricos, debidos al mal condicionamiento de las matrices, con la consiguiente y fatal pérdida de significado de los resultados del cálculo.

[43] A. Seidenberg, *The ritual origin of geometry*, cit., p. 509.

[44] M. Proust, *Du côté de chez Swann*, en *À la recherche du temps perdu*, a cargo de J.-Y. Tadié, Gallimard, París, vol. I, 1987, p. 182.

[45] Se trata de los llamados métodos newtonianos. Para calcular el mínimo local de una función $f(x)$, donde x es un vector de n componentes reales, se incrementa x paso a paso a lo largo de una dirección d que hace decrecer la función, como se haría para llegar al valle partiendo de lo alto de una colina con pequeños desplazamientos, eligiendo cada vez una dirección de bajada. La iteración se resume en la fórmula $xk+1 = xk + \lambda kdk$, asignando un valor inicial $x0$, donde λk es un número que establece para cada k la longitud del paso en la dirección dk. Se demuestra que sí dk es «una dirección de bajada cualquiera» de la f, de tal modo que si f toma en $xk+1$ un valor inferior al correspondiente en xk, entonces dk es solución de un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes Ak es simétrica y definida positiva. El método adopta entonces la forma $xk+1 = xk + Ak^{-1}gk$, donde Ak^{-1} es la inversa de Ak y gk es el vector de las derivadas primeras de f (el llamado gradiente) calculadas en xk. La fórmula generaliza el esquema de Newton para resolver una cuestión $f(x) = 0$, es decir (para $n = 1$) $xk +1 = x^{k} - f(xk) / f'(xk)$, que procede a su vez de la técnica del crecimiento gnomónico en el cuadrado. Véase C. Di Fiore, S. Fanelli, P. Zellini, «Low complexity secant quasi-Newton minimization algorithms for nonconvex functions», en *Journal of Computational and Applied Mathematics*, CCX, 2007, p. 172.

[46] El ejemplo más simple es el de la raíz cuadrada de un número m. Si $m = 2$, en el método de Newton consiste en calcular fracciones que aproximan $\sqrt{2}$ iterativamente, por pasos sucesivos, según la fórmula $ak+1 = (ak^2 + 2) / 2ak$, donde el índice k adopta los valores 0, 1, 2..., y se presume asignada una aproximación inicial $a0$, generalmente comprendida entre 1 y 2. Si $ak = pk / qk$, entonces se calcula $ak+1 = pk+1 / qk+1 = (pk^2 + 2qk) / 2pkqk$, y por tanto numerador y denominador crecen de forma cuadrática. El número de sus cifras se duplica, aproximadamente, en cada paso k.

6

Dýnamis
La capacidad de producir

En Grecia, en el agrandamiento de un cuadrado y de otras figuras geométricas se expresa una producción activa, casi un germinar, como al que alude la *phýsis* de los órficos. Una idea análoga se encuentra en la *dýnamis*, por la cual una superficie se extiende fuera de una línea. Euclides enseñó a construir un cuadrado sobre una línea recta, en el sentido de extraer la figura *a partir de* un lado.[47] Proclo (*Comentario al I libro de los «Elementos» de Euclides*, 423-424) subrayaría más tarde la diferencia entre construir (*systésasthai*) un triángulo y trazar (*anagráphein apó*) un cuadrado casi *produciéndolo* a partir de uno solo de sus lados. En la matemática mesopotámica se emplea un término de significado incierto, *takïltu*, que podría asimismo designar, siguiendo una hipótesis de Thureau-Dangin, «aquello a partir de lo cual se ha producido algo», como un número que, multiplicado por sí mismo, produce un cuadrado.[48] El teorema de Pitágoras, cuya demostración se encuentra en los *Elementos* de Euclides (I, 47), podría responder al criterio del crecimiento de figuras geométricas que mantienen inalterada la forma. A partir de dos cuadrados se construye un tercero, suma de los otros dos, generándolo a partir de la diagonal del rectángulo cuyos lados coinciden con los de los dos cuadrados. Crecimiento y producción parecen compartir una misma ley.

En la antigua matemática mesopotámica, el teorema de Pitágoras era conocido, aunque no se registra una demostración como la de Euclides. Los

babilonios trataban de resolver de forma algorítmica problemas concretos e individuales que no poseían el grado de abstracción y generalización que encontramos en los teoremas de Euclides. Los cálculos babilónicos muestran, en cambio, un dominio de esquemas computacionales tan eficientes como perdurables, que siguen siendo la base de los cálculos más avanzados con los que hoy resolvemos complejos problemas matemáticos. Un problema de la aritmética babilónica consiste en medir la diagonal de una puerta rectangular de la que se conocen la altura y la anchura. El escriba conecta la resolución con el problema del agrandamiento de un cuadrado, que sugiere un esquema de cálculo análogo al que la matemática moderna adoptaría para resolver una ecuación algebraica.[49] Por lo tanto, para respetar los criterios del cálculo, el teorema de Pitágoras está explícitamente relacionado con el crecimiento de una figura geométrica.

En los *Sulvasutra* de Apastamba (I, 4-5), el mismo teorema de Pitágoras es formulado con vistas a destacar que la diagonal del rectángulo produce (*karoti*) fuera de sí lo que cada uno de los lados más pequeño y más grande produce (*kurutas*) en el exterior.[50]

En el griego *poieîn*, se incluye el principio elemental del *construir*, análogo al sánscrito *vi-hr*,[51] figuras geométricas de dimensiones crecientes, según criterios que marcaron la geometría antigua y el cálculo numérico, tanto antiguo como moderno. En *poieîn* está la idea de operar de manera eficaz: podemos, por ejemplo, calcular de forma efectiva la expresión de una multiplicación o de lo que hoy llamamos, no por casualidad, «producto».

En la matemática griega, el término *dýnamis*, que alude a la posibilidad o capacidad de ser o convertirse en algo, designa el lado de un cuadrado, o sea, la raíz cuadrada del número que mide su área. Las líneas definidas por una *dýnamis* pueden también significar, por tanto, los cuadrados de los que son el lado: la raíz cuadrada de 3 puede designar el cuadrado de área 3 (*Teeteto*, 147 d y ss.).

En *El político* (266-a-b), Platón alude a la diagonal y a la diagonal de la diagonal, como si se tratara de una generación progresiva e indefinida de

desdoblamientos de un cuadrado que el lado de un cuadrado inicial tiene la *potencia* de generar.

En la tradición órfica y pitagórica (Filolao, 44 B 11 DK y 315 Kern), esta idea de potencia estaba también contenida en la perfección de la década, que era el «principio de la vida divina, celeste y humana» sin el cual «todas las cosas serían ilimitadas oscuras e inciertas».

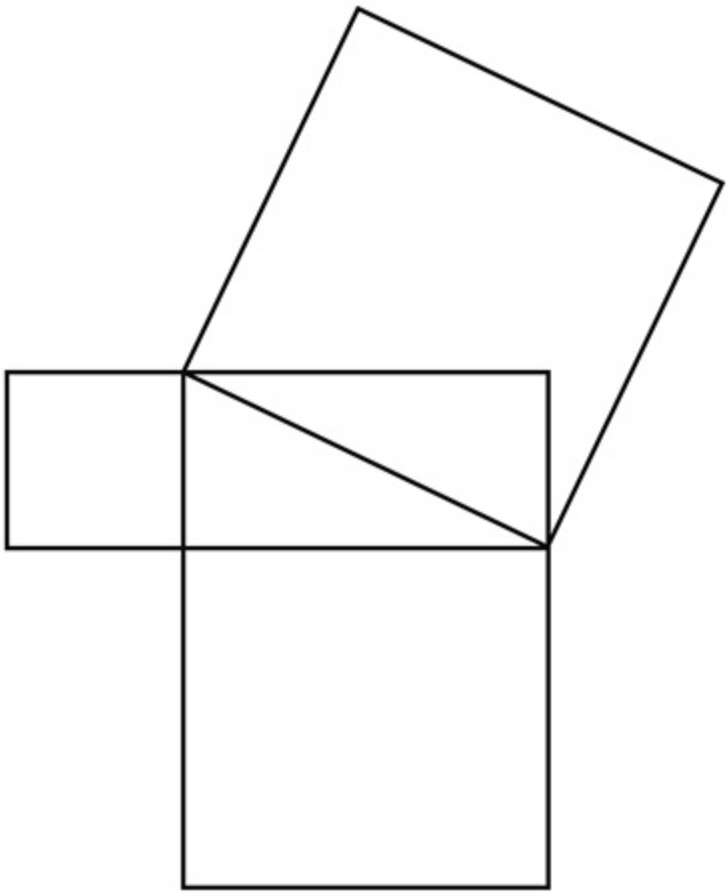


Figura 3

En la antigua matemática babilónica, el equivalente de *dýnamis* era *mithartum*, el cuadrado geométrico producido por su raíz cuadrada (*íbsi*).[52] En la geometría de los altares védicos, para referirse a la generación de cuadrados sucesivos, el uno desde la diagonal del otro, se emplea el término *dvikarani*, la diagonal que produce el doble,[53] es decir, según las indicaciones del *Menón*, una sucesión indefinida de cuadrados el uno doble

del otro, es decir, con la diagonal igual al lado del otro. En todos estos casos es esencial el fenómeno de *producir*: un ente matemático *produce* otro, como si se tratara de una fuerza de ampliación progresiva inherente a los mismos entes matemáticos. Análogamente, mucho más tarde se dirá que la aritmética de las fracciones produce fenómenos que permiten reconocer y definir nuevas entidades numéricas: los números reales, definidos por Dedekind como *secciones*, serán *producidos* por propiedades de tan solo números racionales.

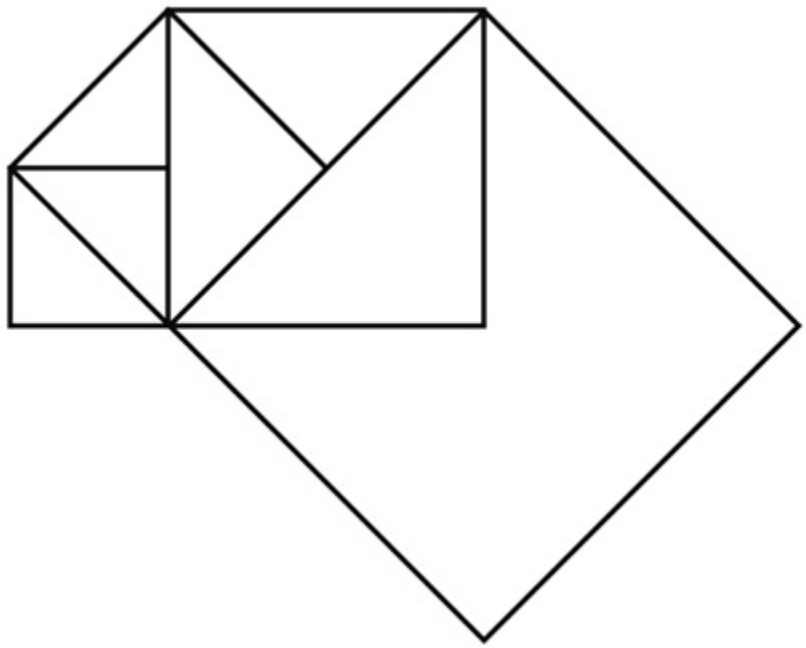


Figura 4

Heidegger comprendió el sentido de la *poíesis*, de la producción, como cuestión central de la *téchne* griega, precisando que toda producción se basa en este ámbito en la verdad del «desvelamiento». Distinto, para Heidegger, sería el caso de la técnica moderna, en la que el desvelamiento no es una producción (*poíesis*), sino una provocación (*Herausfordern*) que desemboca fatalmente en una pretensión de explotación industrial de la energía según el criterio degenerado de una máxima utilización con el mínimo coste.[54]

Los algoritmos que permiten este paso crítico, esta degeneración del producir, se basan, no obstante, en las mismas operaciones elementales de la matemática antigua, aquellas delegadas, justamente, a la producción. La supresión del significado que tenían aquellas operaciones en el saber antiguo ha extraído, por decirlo así, la parte más árida, más instrumental y más ligada a los fines de una operatividad tecnológica.

Las implicaciones ontológicas de la *dýnamis* matemática emergen de forma muy clara de un pasaje del *Sofista* de Platón (247 d-e):

> Yo afirmo justamente que todo lo que por su naturaleza posee una capacidad (*dýnamin*) de producir (*poiéin*) cualquier efecto o sufrirlo, incluso de entidad irrelevante por parte de la cosa más insignificante y aunque solo sea una única vez, todo ello es realmente (*toûto óntos eînai*). Propongo, de hecho, una definición: los entes no son más que potencia (*dýnamis*).

El conducir al ser, dice el Extranjero del *Sofista*, es precisamente un producir, y lo que es llevado a ser se debe definir como «producto» (*Sofista*, 219 b). Sócrates (*República*, 477 c) observaba también que en la *dýnamis* podemos encontrar el género de los entes (*génos ti tôn ónton*), una observación puntualmente retomada por Proclo (*Comentario a la República de Platón*, I, 266, 17). El mismo Extranjero del *Sofista* (238 a) situaba «todo el ámbito del número entre las cosas que son», y el significado de la *dýnamis* como potencia de extensión y como principio de generación natural, como motivo agente de una *phýsis* que hace, literalmente, germinar a los entes sobre el modelo de las progresiones numéricas, está explicitado en el *Epinomis* (990 c):

> Ahora bien, el estudio primario y más importante es el de los números en sí mismos, no de los números integrados, sino de cualquier posible generación y potencialidad (*dynámeos*) de crecimiento [con elevaciones al cuadrado y al cubo] del par y del impar, y del efecto que ello tiene en relación a la naturaleza (*phýsis*) de las cosas.

En el *Filebo* (15 d; 25 d-e), Platón vio una paradójica posibilidad de *coincidencia* del uno y de los muchos a través del *lógos*, es decir, de la relación matemática (*tautòn hèn kaì pollà hypò lógon*), y estableció en el número y en las relaciones la capacidad de hacer cesar las oposiciones entre contrarios. En el número no se expresaba, por tanto, una mera multiplicidad, sino, gracias a la relación, una realización de esa síntesis entre uno y múltiple que es connatural a las cosas *reales*. Este saber, decía Platón, había sido transmitido por los «antiguos, que eran mejores que nosotros y vivían más cerca de los dioses» (*Filebo*, 16 c). En el *Timeo* (52 c) se explica también que el *lógos* es lo que nos dice con verdad y exactitud «lo que realmente es, mostrando que, hasta que una cosa sea una cosa, y otra, otra, ninguna de las dos podría entrar en la otra siendo ella misma y al mismo tiempo convertirse en dos». Aquí el *lógos* no es simplemente el discurso o el razonamiento, sino, de forma más específica, la *relación*, de la que la matemática ha de construir definiciones apropiadas. La relación matemática es el instrumento para poner en relación una cosa con otra, haciéndola *una* y *dos* a la vez, exactamente como demuestra una progresión de figuras semejantes, que son muchas y, al mismo tiempo, por la invariancia de la forma, una sola. Parecidas progresiones pueden intervenir, normalmente, en la misma definición de relación, según las indicaciones de Aristóteles (*Tópicos*, 158 b), como *antanaíresis*, es decir, como algoritmo euclidiano para el cálculo de la medida común de dos tamaños relacionados recíprocamente. Sin el conocimiento del número, según Platón, no tendríamos la posibilidad de conocer lo real, de lo que solo podríamos tener percepciones y recuerdos (*Epinomis*, 977 c).

Contra la posible pulverización en lo múltiple, los números eran la última defensa de una existencia en acto. No sorprende, por tanto, el fragmento de Arquitas en el que se dice que la ciencia del cálculo tiene, con relación a la sabiduría, una clara superioridad sobre las demás disciplinas, y consigue abordar lo que quiere de una forma más clara y evidente (*enargéstero*) que la misma geometría. El término *enargés* alude a algo que aparece y es comprensible de manera transparente, palpable, casi de forma corpórea. En

casos excepcionales, los propios dioses podían acceder a tales apariciones (*Odisea*, XVI, 161). Jámblico observaría después que Pitágoras había definido el número como *extensión* y *actuación* (*enérgeian*) del *lógos* seminal inmanente a la unidad.[55] Un testimonio importante que nos hace ver el significado de los números como proceso de crecimiento inherente a la *phýsis*; proceso que se lleva a cabo gradualmente, decían los órficos, como en la trama de una red (Aristóteles, *La generación de los animales*, 734 a), o bien en una especie de progresiva ramificación (316 Kern).

Estos indicios parecen sugerir, en términos generales, que el número era concebido como una entidad física, pero no ciertamente por la ausencia de una capacidad de abstracción. El número era más bien la *res vera*, la razón última de la actualidad y de la realidad de las cosas, contra todas las posibles argumentaciones sobre la ilusoriedad de lo real. Por eso la función de enlace entre lo humano y lo divino le correspondía al número como ente capaz de representar un dominio de verdades evidentes e intangibles.[56]

Como escribía Simone Weil, «la conciencia y la realidad son proporcionales a la multiplicidad de los sistemas entendidos simultáneamente en una operación única del espíritu».[57] Ahora bien, siempre ha sido el número el que ha permitido esta operación de diferentes modos posibles, independientemente de cómo se le haya considerado en distintos contextos a lo largo de los siglos: como principio de la combinación de diversos entes en una misma clase; como síntesis de diferentes operaciones individuales en una única función definible recursivamente; como número real, atómico, elemento de un campo abstracto denso, ordenado y completo; como sección del campo racional, en analogía con el concepto euclidiano de relación; como número concebido según la naturaleza del gnomon, que realiza el nexo entre dos momentos distintos de crecimiento de una figura geométrica, permitiendo reconocer la misma figura después del cambio al que ha sido sometida. Finalmente, el número como proceso computacional, como algoritmo que debe responder a determinados requisitos de eficiencia.

Plotino afirmó que todos los inteligibles son también en cierto sentido cosas reales (*kaì noerà kaí pos tò prâgma*). Ese era el caso de la superficie,

del sólido y de todas las figuras respecto a su dónde y cómo: «De hecho, las figuras no solo son pensadas por nosotros. Prueba de ello es la figura del universo que está antes que nosotros, así como las demás figuras naturales (*physikà schémata*) que están en las cosas de la naturaleza (*phýsis*), las cuales existen por necesidad (a*nánke*) allá arriba, antes que los cuerpos, en su pureza, como figuras primeras (*prôta schémata*)» (*Eneadas*, VI, 6, 17, 20-25).

La circunstancia decisiva, la razón principal del nexo que unía matemática y realidad, era que el infinito es contrario al número» (*Eneadas*, VI, 6, 17, 4) (aunque digamos que el número es infinito, porque cada vez que pensamos uno podemos pensar también uno mayor). El número y las relaciones entre números se hallaban marcados por un límite, sinónimo de ausencia (*stéresis*), de irrealidad y de no ser. Dos eran para Plotino los infinitos: uno, el modelo, y el otro, la imagen; y de los dos el que se llamaba más propiamente infinito era el segundo (*Eneadas*, II, 4, 15, 20-25). La materia (*hýle*) era infinita por su oposición al *lógos*, es decir, a la relación, que, sin embargo, hacía posible, al medir una cosa con la otra, una disposición ordenada de las cosas reales en el espacio y en el tiempo. De la relación nacería la moderna noción de número.

Para los estoicos (*Stoicorum Veterum Fragmenta* [*SVF*], II, 328) la naturaleza era la misma fuerza que mantiene unido el conjunto del cosmos, así como el principio generador de los seres terrestres. El principio reposaba en el *spermatikòs lógos*, el *lógos* seminal del que dependía la organización de todas las cosas, animadas e inanimadas, y que tenía su contraparte en la unidad de la que emanan las secuencias de relaciones que aproximan a los números racionales.[58]

También los neoplatónicos acostumbraban a pensar el número en estrecha relación con la *phýsis*, en coherencia con la observación platónica sobre la conformidad de la naturaleza a las progresiones numéricas (*Epinomes*, 990 e). El concepto de *physikòs arithmós* se encuentra en Plotino (*Enneadas*, VI, 6, 16, 4546) y en Nicómaco de Gerasa (siglos I-II d. C.),[59] para quien la naturaleza, la *phýsis*, era un tejido constituido por números y por relaciones, a través de flujos generativos organizados según precisas leyes aritméticas.

En el siglo XI, Michele Psello concebiría el número físico (*physikòs lógos*) como concepto complementario del número matemático. El primero, más adecuado a las cosas inferiores, era el principio esencial de los cuerpos vivientes, plantas y animales, porque cada uno de ellos nace, crece y muere en determinados tiempos.[60]

Todo este grandioso conjunto de doctrinas, de alusiones sistemáticas a la afinidad entre número y *phýsis*, pudo sustentarse, presumiblemente, en el hecho de que el número debía ser pensado «según la naturaleza (*phýsin*) del gnomon», circunstancia que había hecho operativo, y lo haría aún más en el futuro, un modelo abstracto de número y un sistema de algoritmos para la descripción matemática de la naturaleza. En el curso de los siglos, la «realidad del número» no respondería solo a la visión filosófica de un cosmos *noetós*, de un universo divino e inteligible, sino también al desciframiento real de la naturaleza mediante modelos simbólicos. El gnomon tardó mucho tiempo en revelar toda su eficacia. Pero después de Viète y Newton, los mismos esquemas sobre los que se habían basado los antiguos algoritmos griegos, indios y babilonios sirvieron para definir la estructura de los métodos más avanzados de la ciencia del cálculo. Para penetrar en la combinación entre cálculo y sabiduría en el mundo antiguo, no bastan las fórmulas filosóficas: hay que seguir cada detalle computacional para comprender su conformidad y su contribución teórica a esas mismas fórmulas.

[47] T. L. Heath, *Commentary* a *The thirteen books of euclid's «elements»*, Dover, Nueva York, 1956, vol. I, p. 348.

[48] *Mathematical cuneiform texts*, cit., p. 130.

[49] J. Høyrup, *Pythagorean «rule» and «theorem»-Mirror of the relation between babylonian and greek mathematics*, Roskilde University, Roskilde, 1999 (*www.Academia.edu/3131799/*).

[50] A. Bürk, «Das Apastamba-Vulba-Sutra», en *Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft*, LV, 1901, p. 556 y «Das Apastamba-Vulba-Sutra», cit., LVI, 1902, p. 329; O. Becker, *Das mathematische Denken der Antike* (1957), Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, segunda ed. revisada, 1966, p. 33.

[51] A. Bürk, «Das Apastamba-Vulba-Sutra», cit., LVI, 1902, p. 327.

[52] J. Høyrup, «Dýnamis, the Babylonians, and Theaetetus 147c7-148d7», en *Historia Mathematica*, XVII, 1990, p. 208. Høyrup recuerda que Taisbak interpreta *dýnamis* como ‘extensión’.

[53] A. Bürk, «Das Apastamba-Vulba-Sutra», cit., LVI, 1902, p. 329.

[54] M. Heidegger, «Die Frage nach der Technik» (1953), en Gesamtausgabe, cit., vol. VII: Vorträge und Aufsätze, a cargo de F.-W. von Herrmann, 2000, pp. 11 y ss. (trad. it. La questione della tecnica, en Saggi e discorsi, a cargo de G. Vattimo, Mursia, Milán, 1976, pp. 9 y ss.).

[55] Jámblico, en *Nicomachi arithmeticam introductionem*, 11 Teubner.

[56] D. J. O’Meara, *Pythagoras Revived*, Clarendon Press, Oxford, 1989, p. 44.

[57] S. Weil, *Cahiers*, en *Œuvres complètes*, cit., vol. VI, tomo II, 1997, p. 74 (trad. it. cit., vol. I, p. 321).

[58] El cálculo de las relaciones definidas por los números diagonales y laterales para aproximar √2 comenzaba por la unidad, que Teón de Esmirna (I-II siglo d. de C.) llamaba *spermatikòs lógos*.

[59] D. J. O’Meara, *Pythagoras Revived*, cit., p. 62.

[60] M. Psellus, «Physical Numbers», en *On Pythagoreanism V-VII*, *ibid*., pp. 218-219.

7

Intermedio
La mecánica espiritual

Dos enigmáticos y lacónicos juicios sobre la naturaleza del alma nos han llegado de tiempos antiguos. Según el primero, atribuido a Heráclito, «al alma le compete un *lógos* que se acrecienta a sí mismo» (22 B 115 DK). Según el segundo, atribuido a Jenócrates, a quien le fue confiada la dirección de la Academia platónica después de Espeusipo, «el alma es un número semimoviente». Aristóteles (*Acerca del alma*, 408 b 34 y ss.) citaba el juicio de Jenócrates entre las teorías completamente irracionales, pero no consideraba superfluo extenderse sobre los motivos que lo llevaban a refutarlo. A esto se puede añadir el íntimo nexo entre una filosofía del alma y una teoría global de la naturaleza del universo prefigurado en una cuestión planteada por Sócrates (*Fedro*, 270c): «Pero ¿crees que es posible conocer la naturaleza (*phýsin*) del alma de una forma suficientemente adecuada si se prescinde de la naturaleza (*phýseos*) del todo?». La respuesta, evidentemente negativa, conecta indirectamente número y alma, porque Platón afirmaba que en las progresiones numéricas se podía leer la *phýsis*, y que la «naturaleza» del alma era precisamente su *phýsis*, su crecimiento en el *lógos*.

Las palabras de Heráclito son intraducibles y se prestan a diferentes interpretaciones, dependiendo del sentido que se le dé a la palabra *lógos*. Pero, en la sentencia aparentemente absurda de Jenócrates, lo que para Heráclito era el *lógos* puede ser, en términos más detallados, el número.

Tanto el *lógos* de Heráclito como el número de Jenócrates no están quietos, el primero se acrecienta, el segundo se mueve. Ahora bien, *kínesis*, el movimiento, es una palabra que para Aristóteles denota cualquier tipo de proceso durante el cual una cosa puede cambiar de aspecto, naturaleza y posición. No es impropio afirmar que *kínesis* puede referirse también a la numeración, a un movimiento medido, a un fluir del tiempo ritmado por los números. Y sabemos que entre los primeros significados de *lógos* se encuentra el de elegir y el de pasar revista numerando.

Entre los estoicos, las pasiones del alma se equiparaban normalmente a la naturaleza (*phýsis*). Seguían o, más a menudo, transgredían su *lógos*, es decir, la medida numérica. *Contra natura* significaba para Crisippo «contra el recto *lógos* acorde con la naturaleza (*katà phýsin lógon*)» (*SFF*, III, 94). Para Zenón de Cizio (SVF, I, 51), la pasión era un expandirse o contraerse del alma sin medida (*álógos*), como si fueran violadas las leyes matemáticas de las que depende el crecimiento natural, aquella que Platón veía impresa, justamente, en las progresiones numéricas. Para entender la recíproca afinidad de número, alma y *phýsis*, si se prescindiera del cambio de significado que el término *natura* adquirió a lo largo de los siglos, sobre todo en el siglo XVIII, se podría apelar a la tesis de Spinoza, para quien «la naturaleza es siempre la misma, y su virtud y potencia de actuar, una y la misma en todas partes» (*Ética*, III, Prefacio).

Otra peculiaridad aproxima las sentencias de Heráclito y Jenócrates: el número se mueve a sí mismo, el *lógos* se acrecienta a sí mismo. Movimiento y acrecentamiento se desarrollan por medio de una disponibilidad intrínseca del alma a crecer y a cambiar su propio estado por sí misma, por ampliaciones sucesivas, como desde una semilla inicial. Bruno Snell[61] observaba que esta posibilidad de desarrollo autónomo del espíritu era todavía ajena a Homero, que siempre hace depender de la intervención de un dios cualquier aumento de las fuerzas físicas y espirituales. También a Homero le sería ajena la idea de *prôton kinoûn*, de primer motor, en referencia al alma, como la concebiría Aristóteles.

Pero ¿de qué se genera ese *por sí misma* del alma automotriz? La semilla crece invisible al principio, casi mecánicamente, con arreglo a una

virtualidad cuyo origen no nos es dado saber. Simone Weil habla de una «mecánica espiritual cuyas leyes son tan rigurosas como las de la otra, pero diferentes».[62] La referencia explícita es a Marco (4, *26-32*), donde se habla de un crecimiento automático (*mekýnetai*, *automáte*) del Reino, como sin que lo sepamos, del mismo modo que una semilla en la tierra. Pero el alma también está unida al cuerpo, advertía Platón (*Fedón*, 83 d-e), y todo placer y dolor fijan y casi clavan el alma a la forma corpórea, haciéndola creer que es verdad lo que el cuerpo le dice que es verdad. Si sigue esta inclinación, el alma no podrá llegar pura al Hades, caerá en otro cuerpo y crecerá según su naturaleza: «como si fuera simiente, allí germinará (*hósper speiroméne emphýesthai*) y, por esto, nunca podrá participar de lo que es divino, puro y uniforme».

Esto nos recuerda a las palabras de Epicarmo sobre el crecimiento según una ley, palabras que nos recuerdan a su vez, por una singular afinidad, las de una poesía de Goethe:

Como en el día que te trajo al mundo,
el sol estaba alto para saludar a los planetas,
muy pronto te has vuelto más grande
según la ley que reguló tu comienzo.
Así has de ser, de ti no puedes escapar.
Así lo dijeron ya las sibilas y los profetas.
Ningún tiempo ni ningún poder pueden quebrar
la forma impresa que se desarrolla durante la vida.[63]

Cuando es generado por una fórmula iterativa —desde la más simple, que consiste en añadir cada vez una unidad a un entero natural para encontrar el siguiente, hasta los más complejos procedimientos recursivos—, también al número, como al alma, le compete un movimiento automático. Tanto Dedekind como Turing captarían la naturaleza automática de los procesos aritméticos, el primero con el mecanismo de la recursión, el segundo con una noción de máquina más alusiva y explícita. Sin embargo, Turing fue consciente de la asechanza de un posible crecimiento desmesurado de los

números. De hecho, comprendió cómo el error, en la máquina aritmética, puede crecer si los números calculados se vuelven muy grandes, y cuantificó el crecimiento del error, en el caso de un sistema de ecuaciones lineales, por medio de funciones capaces de medir el *tamaño* de determinadas matrices.

Si la naturaleza, como observaba Nietzsche, es realmente sobreabundante, «derrochadora sin medida e indiferente sin medida, sin propósitos ni cautela»;[64] si a la *phýsis* compete realmente ese carácter de excedente, de sobreabundante afluencia de presencia que le atribuía también Heidegger, entonces es verosímil que también el número, que se asemeja a la *phýsis*, pueda crecer de forma completamente incontrolada. No solo estaba el infinito en el horizonte del crecimiento de los números: con el cálculo automático a gran escala, la mirada tuvo que aprender mucho antes a detenerse en el terreno difícil y todavía poco conocido de lo finito, ya fuera este muy grande o muy pequeño.

[61] B. Snell, *La cultura greca e le origini del pensiero europeo*, Einaudi, Turín, 1963, pp. 43 y ss. (ed. orig. *Die Entdeckung des Geistes*, Claassen & Goverts, Hamburg, 1946).

[62] S. Weil, *Cahiers*, en *Œuvres complètes*, cit., vol. VI, tomo IV, 2002, p. 336 (trad. it. cit., vol. IV, p. 338).

[63] J. W. von Goethe, «Gott und Welt, Urworte. Orphisch», en *Werke*. *Hamburger Ausgabe in 14 Bänden*, a cargo de E. Trunz, dtv, Múnich, vol. I, 1998, p. 359. Citado en A. Schopenhauer, *Preisschrift über die Freiheit des Willens*, cit., p. 96 (trad. it. cit., p. 127).

[64] F. Nietzsche, *Al di là del bene e del male*, en *Opere*, a cargo de G. Colli y M. Montinari, Adelphi, Milán, vol. VI, tomo II, 1968, p. 13. Véase P. Hadot, *Le voile d'Isis*, Gallimard, París, 2004, p. 208; véase también M. Heidegger, *Seminare*, *in Gesamtausgabe*, cit., vol. XV, a cargo de C. Ochwadt, 1986, p. 331 (trad. it. Seminari, a cargo de F. Volpi, Adelphi, Milán, 1992, p. 95).

8

Las paradojas de Zenón
La explicación del movimiento

Con Zenón de Elea comienza la revelación más paradójica de la incognoscibilidad del infinito, efectuada a través de pasajes dialécticos que nunca han sido verdaderamente rebatidos a lo largo de los siglos. La historia de las paradojas de Zenón se compone de comentarios contradictorios, de críticas y refutaciones, de recuperaciones y de sorprendentes validaciones, que han acabado invirtiendo el significado: Zenón tenía razón, el mundo debe ser considerado de nuevo de acuerdo con sus argumentaciones, y si se elabora una teoría matemática del continuo coherente y adecuada, las paradojas se revelan como instrumentos idóneos para reinterpretar el mundo real. No invalidan, sino que *son* la realidad, e indican en qué dirección puede representarla la matemática. Esta es al menos la explicación que pareció prevalecer a principios del siglo XX, con el desarrollo de una teoría matemática del continuo cuyos inicios se remontan a la segunda mitad del siglo XIX.

Las paradojas sobre el movimiento se basan en la disminución progresiva de las longitudes de recorrido y en la observación de que la disminución *in infinitum* de los elementos en los que se divide por dicotomía una línea continua nos hace ver el mundo como algo irreal. Parece que el infinito (*ápeiron*) se introduce en el pensamiento eleático, ya en los siglos VI y V a. C., como dilema, pues se encuentra expresado en una doble versión: una afirmativa, sobre todo con Meliso, y la otra negativa y aparentemente

contraria a la primera, con las paradojas de Zenón. Meliso se expresa de forma diferente a Parménides. Para este último el infinito no es un atributo del ser, porque está marcado negativamente por un *no ser*, por la ausencia (*stéresis*) inherente al *ápeiron* griego. Mientras que para Parménides la fuerza de la necesidad parece coaccionar al ser con las cadenas del límite (28 B 8, 26-33 DK), Meliso afirma rotundamente que el ser que siempre era y siempre será, sin principio ni fin, es infinito, y que nada que tenga principio y fin puede decirse infinito (30 B 1-4 DK). El infinito, afirmaba Meliso, es también *uno* (30 B 5 DK), porque si fuera *dos*, tendría un límite en otro (*pròs állo*).

Por su parte, el infinito de Zenón es un motor de generación de paradojas cuyas finalidades podrían ser diferentes: negar la posibilidad del movimiento, o bien constatar la insuficiencia de nuestras explicaciones racionales sobre lo que percibimos con los sentidos.

La división dicotómica del recorrido de Aquiles no tiene fin, es un perfecto ejemplo de infinito potencial. Si Aquiles debe atravesar un espacio de un metro, debe pasar por los intervalos de longitud decreciente 1/2, 1/4, 1/8..., $1/2^n$..., donde n toma infinitos valores. Si la tortuga parte con una mínima ventaja, en el tiempo en que Aquiles recorra esa distancia, aquella dará un breve paso hacia delante, y si en la persecución se mantiene la misma lógica, este nunca será capaz de alcanzarla. Es más, Aquiles no puede recorrer ni siquiera un metro, porque antes debe superar la mitad, después la mitad de lo que queda, es decir, un cuarto del total, y así sucesivamente hasta el infinito. Si se considera en cada punto del recorrido la infinidad de intervalos que deben ser superados antes de alcanzar ese punto, se concluirá que Aquiles ni siquiera se mueve.

Si se observan las leyes del movimiento y la simple fórmula que relaciona el espacio recorrido s con el tiempo t empleado en recorrerlo y con la velocidad v, es decir, $s = tv$, parece evidente que si Aquiles corre con una velocidad constante v, adelantará a la tortuga, que procede con una velocidad constante v' menor que v, aunque la tortuga tenga una ventaja

inicial s_0. De hecho, existe un valor de *t* para el que *tv*, el espacio recorrido por Aquiles, es mayor que el espacio recorrido por la tortuga, $tv' + s_0$.

Una base científica de la evidente ventaja que Aquiles sacará a la tortuga se halla también en la circunstancia de que la suma de los infinitos intervalos en los que está dividido el recorrido es *finita*, y precisamente igual a 1. Si Aquiles mantiene una velocidad superior a un determinado valor finito *v*, recorrerá un metro en un tiempo no superior a $s/v = 1/v$. En cambio, no conseguiría recorrerlo si su velocidad disminuyera progresivamente o tendiese a 0 como la longitud de los intervalos en los que se ha dividido el espacio. Pero la paradoja persiste: ¿cómo consigue atravesar Aquiles los infinitos intervalos «recortados del recorrido de un metro en un tiempo finito? O más en general: ¿cómo se puede realizar en un tiempo limitado un número ilimitado de operaciones? El argumento, basado en el hecho de que la suma de los intervalos parciales es finita, sirve para responder a la pregunta: ¿*cuándo* adelantará Aquiles a la tortuga? Pero falta por entender cómo conseguirá hacerlo, *cómo* atravesará una infinita sucesión de intervalos.[65] Parece cierto, e igual de incomprensible, que Aquiles, para recorrer una línea recta, debe tocar *todos* sus puntos.

Al transmitir la paradoja, Aristóteles razonaba sobre el tiempo de recorrido (*Física*, 233 a 21-31; 239 b 5-240 a 18). A falta de una teoría de límites de las series numéricas, argumentaba, ante todo, que una línea continua puede decirse infinita en dos sentidos, *por división* o bien *por los extremos*.[66] Solo en el segundo caso el tiempo de recorrido es infinito, mientras que en el primero, si la velocidad se mantiene por encima del umbral finito, es limitado. Su argumentación está bien orientada, pero sigue faltando la conclusión que se deriva de observar que la suma de los infinitos intervalos de recorrido es igual a 1.

Zenón desarrolla su tercera argumentación contra el movimiento que afecta a la flecha en vuelo en estos términos: si se admite que cualquier cosa está en estado de quietud o de movimiento cuando ocupa un espacio igual a ella misma y si el objeto se mueve solo en el instante, entonces la flecha permanece inmóvil.[67] Aristóteles (*Física*, 239 b 5-9) resume la

argumentación como si Zenón pensara en un tejido atomista del espacio y del tiempo, un continuo compuesto de infinitos elementos indivisibles: «La falacia del argumento de Zenón es obvia: si como él sostiene una cosa está quieta cuando no se ha desplazado en absoluto del espacio ocupado por sus dimensiones, y en cada instante fijado en el curso de su supuesto movimiento total ella está en el espacio que ocupa en ese instante, entonces la flecha no se mueve en ningún momento a lo largo de su vuelo. Pero esta es una conclusión falsa; porque el tiempo no está compuesto por instantes actuales, no más que cualquier otra magnitud está compuesta por elementos atómicos».

Por eso Aristóteles sostiene que la flecha en vuelo permanece quieta solamente si se supone que el tiempo está compuesto por instantes. De hecho, es imposible que la flecha se mueva *en el instante* indivisible, porque en ese instante, al moverse, debería cambiar de posición, y el instante sería entonces divisible.[68]

Pero no está claro hasta qué punto Zenón asumía la hipótesis atomista como un dato necesario a la lógica de la paradoja. Incluso suponiendo que el espacio y el tiempo no estuvieran compuestos, respectivamente, por puntos y por instantes indivisibles, y que el infinito por división fuera puramente potencial, el movimiento seguía siendo un fenómeno incomprensible. El hecho de que la flecha se mueva durante un segundo presupone que esa misma flecha vuela durante el primer medio segundo, durante la primera mitad de este medio segundo, y así de forma indefinida. Alfred N. Whitehead observó que Zenón debía ser oscuramente consciente de que, si consideramos el proceso en su conjunto y nos preguntamos *qué* es lo que se ha movido, no es posible dar una respuesta segura. Cualquier cosa que se haya movido presupone algo que se haya movido durante un tramo anterior y, al no conseguir completar el recorrido, cabe pensar que *nada* se ha movido.[69]

Una cuestión implícita en la paradoja de Aquiles y la tortuga, y debatida desde las primeras investigaciones sobre el análisis infinitesimal de Leibniz y de Newton, es si las variables pueden alcanzar sus límites. Newton (*Principia*, libro I, sección I, lema I y escolio al lema XI) defendía la

eficacia del método de los indivisibles, concebía cantidades «nacientes» y «evanescentes», y sostenía que las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que por ninguna diferencia dada, acaban siendo *en última instancia* iguales. George Berkeley, en su famoso y polémico alegato sobre el uso matemático de los infinitesimales, afirmaba que la ciencia matemática carece de esas ideas claras y diferentes con las que muchos esperan explicar, finalmente, los misterios de la religión.[70]

Posteriormente, Russell hizo un comentario decisivo al respecto, señalando que las paradojas sobre el movimiento de Zenón están muy lejos de ser meros sofismas. Así, en 1903, escribía en los *Principles of Mathematics* (ap. 327):[71]

> En este caprichoso mundo, nada es más caprichoso que la fama póstuma. Una de las víctimas más notables de la falta de juicio de la posteridad es Zenón de Elea. Habiendo inventado cuatro argumentos, todos inconmensurablemente sutiles y profundos, la estupidez de los filósofos posteriores a él proclamó que Zenón no era otra cosa que un prestidigitador ingenioso y que todas sus argumentaciones eran sofismas. Tras dos mil años de continua refutación, estos sofismas fueron nuevamente enunciados, y formaron la base de un renacimiento de la matemática obra de un profesor alemán, quien probablemente nunca soñó que existiera alguna relación entre él y Zenón. Weiertrass, desterrando rigurosamente todos los infinitesimales, ha demostrado finalmente que vivimos en un mundo inmutable, y que la flecha, en cada instante de su vuelo, está realmente quieta.

Russell (*Principles*, ap. 332) pensaba que el argumento de la flecha enunciaba un hecho completamente elemental, y que descuidarlo habría mantenido estancada la filosofía del movimiento durante largos siglos. Su referencia a Karl Weierstrass se puede explicar de este modo: junto a Augustin-Louis Cauchy, Weierstrass fue el primer matemático que

reconstruyó con claridad el análisis sin infinitesimales, afirmando que una función $f(x)$ tiende a un límite L, cuando x tiende a l, si, dado un valor positivo ε en cualquier caso pequeño, se puede encontrar un número positivo δ (dependiente de ε) tal que la distancia de $f(x)$ a L es menor que ε cuando la distancia de x a l es menor que δ. Si $L = 0$, la función f se aproxima a 0 cuando x tiende a l, pero en la definición se evita a propósito decir que el valor $f(x)$ se vuelve infinitesimal. Desaparece entonces la idea del fluir, de la tensión dinámica de la variable hacia su límite, simplemente porque las variables, dentro de los confines diseñados por ε y por δ, no se mueven en absoluto, solo asumen los valores que les competen. La inmovilidad prevalece sobre el movimiento.

Se puede entonces definir la *velocidad* de un cuerpo en un instante t solo como el *límite* de la relación entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrerlo al tender la variable tiempo al instante t. Este límite, un simple número, es la *derivada* del espacio como función del tiempo de recorrido en el instante t. De este modo se podían evitar las «cantidades evanescentes» concebidas en los primeros desarrollos del cálculo infinitesimal. Así, Russell decía en los *Principles* (ap. 447):

> Se debe observar que, como consecuencia de la negación del infinitesimal y de la interpretación puramente técnica de la derivada de una función, debemos rechazar enteramente la noción de un *estado* de movimiento. El movimiento consiste simplemente en la ocupación de lugares diferentes en instantes diferentes, ocupación sujeta a la continuidad [...]. No existe transición de lugar a lugar, ni momento consecutivo o posición consecutiva, ni nada parecido a la velocidad, salvo en el sentido de un número real límite de una serie de cocientes [las relaciones entre espacio y tiempo de recorrido]. La desestimación de la velocidad y de la aceleración como hechos físicos (y, por tanto, como propiedades pertenecientes en cada instante a un punto en movimiento, y no simplemente como números reales que expresan límites de ciertas relaciones) implica, como veremos, algunas dificultades en la enunciación de las leyes del movimiento; pero la reforma introducida

por Weierstrass en el cálculo infinitesimal ha hecho imperativa tal desestimación.

Por tanto, los números racionales e irracionales, pensados como límites de variables, heredaban la naturaleza efectiva y real de conceptos físicos como la velocidad y la aceleración. En los mismos números se podían distinguir entidades atómicas equivalentes a los puntos de la recta. El movimiento podía ser interpretado únicamente a través de las coordenadas espacio-temporales, y por tanto a través de sucesivas posiciones fijas y puntuales. «La mecánica únicamente puede explicar el movimiento a través de la inmovilidad».[72]

Solo en los números, esta era la conclusión más importante, se encontraba la realidad del continuo espacio-temporal. Y los números que desempeñaban este cometido podían ser tanto racionales como irracionales. Es más, la existencia de los números reales (racionales + irracionales) parecería, después de Weirstrass, el efecto de una creación libre del matemático, aunque derivada de propiedades objetivas del cuerpo numérico. ¿Qué mejor acuerdo entre pensamiento y naturaleza, entre libertad y efectividad?

Whitehead explicaba que el mundo objetivo se expresa siempre en el doble aspecto de potencialidad de división y de mutuas relaciones y gradaciones que el proceso de división hace aparecer, a cada instante, como realidades efectivas. El mundo *percibido* aparece siempre en su indefinida potencialidad de división —es divisible, pero no actualmente dividido—, mientras que las entidades reales, atómicas, las que definen la *realitas objectiva*, viven en un sistema de relaciones matemáticas. Para apoyar sus observaciones, Whitehead retomaba las tesis de William James, quien, recordando a Zenón, distinguía la naturaleza de un mundo percibido, inmediata o actualmente, por la indefinida divisibilidad imaginada por nuestra razón: «O la experiencia carece de contenidos y de cambios, o bien consiste en porciones perceptibles de contenido y de cambio. El conocimiento de la realidad se desarrolla literalmente a través de gemas o gotas de percepción. Con el intelecto y la reflexión podemos dividirlas en

partes, pero, como datos inmediatos, se presentan enteramente o no se presentan en absoluto».[73]

Whitehead observaba que «la continuidad afecta a lo que es potencial, mientras que la actualidad es irremediablemente atómica»,[74] pero la continuidad geométrica estaba ya concebida de facto, gracias a las teorías de Cantor y de Dedekind, como un dominio de números reales. El diseño de la aritmetización del análisis ya había *atomizado* la extensión continua. La actualidad se apoya, finalmente, en la teoría del continuo, en entidades atómicas definidas, que constituyen un sistema de divisiones reales, de eventos instantáneos en relación con otros eventos situados en algunos puntos del continuo. Entre números y puntos se establece axiomáticamente una correspondencia biunívoca y, a través de los números, los puntos del espacio y los instantes del tiempo adquieren un nuevo tipo de realidad. Así escribía Russell (*Principles*, ap. 326):

> Limitándonos al continuo aritmético, entramos en conflicto de forma diferente con los preconceptos comunes. Poincaré, respecto al continuo aritmético, observaba justamente: «El continuo así concebido no es otra cosa que una colección de individuos colocados en cierto orden; infinitos en número, es cierto, pero exteriores entre sí. Esta no es la concepción ordinaria, en la que se supone que entre los elementos del continuo existe una especie de nexo íntimo que los convierte en un todo en el que el punto no es anterior a la línea, sino la línea al punto. De la famosa fórmula, el continuo es la unidad en la multiplicidad, solo subsiste la multiplicidad, la unidad ha desaparecido».[75]

Para Poincaré, la noción matemática de continuo es un producto de la mente humana, pero es una suerte de experimento físico que favorece y hace casi necesaria la creación. La propiedad de densidad del continuo aparece como consecuencia de una simple comparación entre diferentes medidas, como es el caso, por ejemplo, de tres pesos A, B y C. Puede suceder que sea $A = B$ y $B = C$, por la imposibilidad experimental de distinguir A de B y B de C, pero que sea también, experimentalmente, $A <$

C. Nos veremos entonces inducidos a pensar que, en realidad, contrariamente a las indicaciones del experimento, *A* es distinto de *B* y *B* es distinto de *C*, y que otros pesos se interponen entre *A* y *B*, así como entre *B* y *C*. Una conclusión, dictada por un principio de no contradicción, que no depende de la precisión de los instrumentos usados para medir los pesos.

Análogamente, parece necesario tener que imponer la llamada completitud del continuo, es decir, la inserción en su conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas no son números racionales. De hecho, existen curvas que se cortan en puntos cuyas coordenadas no *son* números racionales. Un ejemplo es el punto de intersección entre la diagonal de un cuadrado y el círculo inscrito. Asumiendo que solo existen los puntos de coordenadas racionales, no podríamos sostener que ese punto de intersección existe realmente. Si dibujamos en el plano cartesiano un círculo con centro en el origen y radio igual a la diagonal de un cuadrado de lado *1*, corta el eje de abscisas en un punto cuya distancia del origen es medida por el número irracional $\sqrt{2}$.[76] Ahora bien, es una desmesurada exigencia de nuestra mente considerar el mismo punto con la misma categoría que una entidad real. Nuestra mente no tolera lagunas en el continuo y el modo más eficaz de evitarlas es asociar a las coordenadas de los *puntos* de intersección entre líneas *números* que tienen la misma *realidad* que los números enteros y que las fracciones. El número da realidad al punto, a condición de que él mismo sea una entidad real.

Como explicaba Russell, «infinitud y continuidad aparecen juntas en la aritmética pura» (*Principles*, ap. 435). Esta conquista del intelecto se presentó como un remedio a las dificultades que Zenón había planteado acerca de la naturaleza del movimiento y la composición del continuo. La solución moderna de la paradoja de Aquiles se basó en asumir como real o posible justo lo que Zenón consideraba paradójico, es decir, en el comentario de Russell, la ausencia de un estado de movimiento: un sacrificio que salvaba un dato esencial, la existencia actual de las cosas. Una entidad actual, observaba Whitehead, no se mueve: está donde está y es lo que es.[77]

Russell sostenía que la noción de un estado de movimiento no tiene fundamento, porque el movimiento está compuesto por posiciones atómicas ocupadas en determinados instantes, ambos evaluables mediante números reales, correspondientes a puntos de la recta. Aristóteles (*Física*, 234 a 24 y ss.) había demostrado que nada puede moverse en el instante (*nŷn*), y que por ello el tiempo no está compuesto de instantes. Russell respondía que es verdad que en el instante nada se mueve, y que esto es compatible con una teoría coherente del continuo aritmético provisto de métrica euclidiana tal y como había sido elaborado por Weierstrass, Dedekind y Cantor. Solo así se podía garantizar la realidad de lo que cambia y se mueve. Lo paradójico se volvía real.

En los comentarios de Russell se capta en todo caso una especie de forzamiento, evidente en el hecho de que se ha tratado de resolver un tipo de conflicto entre rigor matemático y concepción común. La concepción común, como sucedía también para otras teorías matemáticas, debía ceder el paso a una visión enfocada a la evidencia de las fórmulas. La matemática siempre ha sido un arte de la paradoja, y sus fórmulas han suscitado a menudo una reacción de incredulidad en el mismo científico que las ha descubierto o ideado. Pero la matemática es también un arte de construir simulaciones y modelos fieles, hasta donde sea posible, a nuestras concepciones comunes, mediante definiciones y teorías capaces de hacernos reconocer lo que esperamos. A ese imperceptible forzamiento que se capta en los comentarios de Russell, siguió el oprobio explícito del comentario a la primera paradoja sobre el movimiento de Zenón por parte de Hilbert y de Bernays, hecho propio, posteriormente, también por Stephen Kleene:

> Hay una solución mucho más radical que la paradoja. Consiste en constatar que no estamos obligados de ningún modo a creer que la representación matemática del movimiento en términos de espacio y tiempo es físicamente significativa para intervalos de espacio y de tiempo arbitrariamente pequeños; más bien tenemos todas las razones para suponer que ese modelo matemático extrapola los hechos de un cierto dominio de experiencia, es decir, los movimientos dentro de

> órdenes de tamaño hasta ahora accesibles a nuestra observación, en el sentido de una simple construcción conceptual, análoga a la forma en que la mecánica de los continuos efectúa una extrapolación en la que se asume que el espacio está lleno, de forma continua, de materia [...]. La situación es parecida en todos los casos en que se cree posible mostrar directamente un infinito [actual] como dado por la experiencia o por la perfección [...]. Un examen más atento muestra entonces que una infinitud no nos es dada de ningún modo, sino que es interpolada o extrapolada por medio de un procedimiento intelectual.[78]

Pero la única forma era precisamente extrapolar, completar los hechos de la experiencia con un modelo matemático del continuo, derivado a su vez, como observó Hermann Weyl, de una mera construcción simbólica. Aristóteles (*Física*, 263 a 25-30) observaba que si se divide repetidamente el continuo en dos mitades, no pueden resultar continua ni la línea ni el movimiento. El movimiento, explicaba, es propio de un continuo, y en el continuo hay, es cierto, infinitas mitades, pero solamente en potencia, no en acto. En términos más simples, podría expresarse así: es absurdo pensar que lo que se mueve se mueve contando. Pero entonces estaba claro que el movimiento y la continuidad de la recta no podían encontrar una explicación solo en los números naturales con que se cuentan las cosas una por una. Sería necesaria una teoría más general del número y una extensión de la idea de actualidad o de entelequia a los que a finales del siglo XIX se llamarían, no por casualidad, *números reales*.

[65] T. L. Heath, *A History of greek mathematics* (1921), Dover, Nueva York, vol. I, 1981, p. 279; H. Weyl, *Philosophy of mathematics and natural science*, Princeton University Press, Princeton, 1949,

p. 42; A. Grünbaum, *Can an infinitude of operations be performed in a finite time*?, en *Philosophical Problems of Space and Time*, Reidel, Dordrecht, segunda ed. ampliada, 1973.

[66] Un segmento finito es infinito por división (*katà diaíresin*), mientras que una recta es infinita por los extremos (*toîs eschátois*).

[67] T. L. Heath, *A history of greek mathematics*, vol. I, cit., p. 276.

[68] *Loc. cit.*

[69] A. N. Whitehead, *Process and reality* (1929), Free Press, Nueva York, 1969, pp. 84-85.

[70] F. Cajori, «The History of Zeno's Arguments on Motion», en *The American Mathematical Monthly*, XXII, 1915.

[71] B. Russell, *The Principles of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1903.

[72] G. Colli, *Zenone di Elea*, Adelphi, Milán, 1998, p. 121.

[73] Citado en A. N. Whitehead, *Process and reality*, cit., p. 84.

[74] *Ibid*., p. 76.

[75] Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse* (1902), Flammarion, París, 1968, p. 51.

[76] El número √2 está, por tanto, asociado a una construcción euclidiana, con regla y compás. Como es bien sabido, no todos los números irracionales (algebraicos) corresponden a construcciones euclidianas. Esta circunstancia podría incidir sobre el valor de realidad que se decida atribuir a los números, pero aquí no se discutirá sobre este aspecto de la ontología numérica.

[77] A. N. Whitehead, *Process and Reality*, cit., p. 89.

[78] D. Hilbert, P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Springer, Berlín, vol. I, 1934, pp. 15-17. Citado en S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Van Nostrand, Nueva York, 1952, pp. 54-55.

9

Las paradojas de la pluralidad

Las modernas teorías del continuo matemático trataron de aclarar y desentrañar también las paradojas de Zenón sobre el concepto de pluralidad. Según las fuentes, la paradoja sobre la pluralidad tenía como presupuesto la demostración de que el ser que no tiene tamaño no existe, y que en toda cosa que esté dotada de tamaño y espesor las partes están de alguna forma distantes entre sí (29 B 1 DK). Ahora bien, las partes de las que se compone una pluralidad, consistente en un número infinito de elementos, pueden tener tamaño positivo o nulo. En el primer supuesto, si las partes tienen el mismo tamaño, aunque sea muy pequeño, se obtiene en cualquier caso un tamaño infinito; en el segundo se obtiene en cambio un tamaño nulo, porque *una suma, finita o infinita, de tamaños de dimensión nula es nula*. Una suma infinita de puntos inextensos debe producir un tamaño de extensión igual a cero. Si dividiendo hasta el infinito una línea continua se llegara a elementos indivisibles, se tendría la siguiente paradoja: si los elementos indivisibles tienen igual longitud positiva, la longitud de la línea es infinita; si tales elementos tienen una longitud nula, su conjunto tiene también longitud nula. «Así, si los seres son muchos, es necesario que sean grandes y pequeños a la vez: tan grandes como para tener un tamaño infinito, y tan pequeños como para no tener ningún tamaño» (29 B 1 DK).

En su polémica contra la doctrina de Parménides, Aristóteles se sirve de la tesis de Zenón, según la cual un punto o una unidad, siendo indivisible y sin tamaño, no produce efecto alguno, tanto si es añadido como sustraído, y es,

por tanto, un no ser, una pura nada: «Si el uno en sí fuera indivisible, entonces, según la concepción de Zenón, sería nulo. De hecho, Zenón niega que tenga existencia aquello que, sumado o sustraído, no hace que una cosa sea más grande o más pequeña, asumiendo como evidente que lo que es real debe tener tamaño» (*Metafísica*, 1001 b 7; 29 A 21 DK).

Por consiguiente, para Aristóteles, Zenón sostenía que si algo que se suma no produce incremento, es *nada*, y la misma conclusión vale para lo que, al ser sustraído, no causa disminución. Se trata de una observación importante que se puede relacionar con la idea platónica de realidad. Para Platón la realidad estaba basada en la *dýnamis*, la capacidad de producir un efecto de cualquier clase, en particular un crecimiento o una disminución. En el centro de esta concepción se encontraba la analogía entre el desarrollo de las progresiones numéricas y el movimiento de acreción connatural a la *phýsis*. Análogamente, en el razonamiento de Zenón, «la realidad de una cosa parece depender de la capacidad de producir crecimiento o disminución».

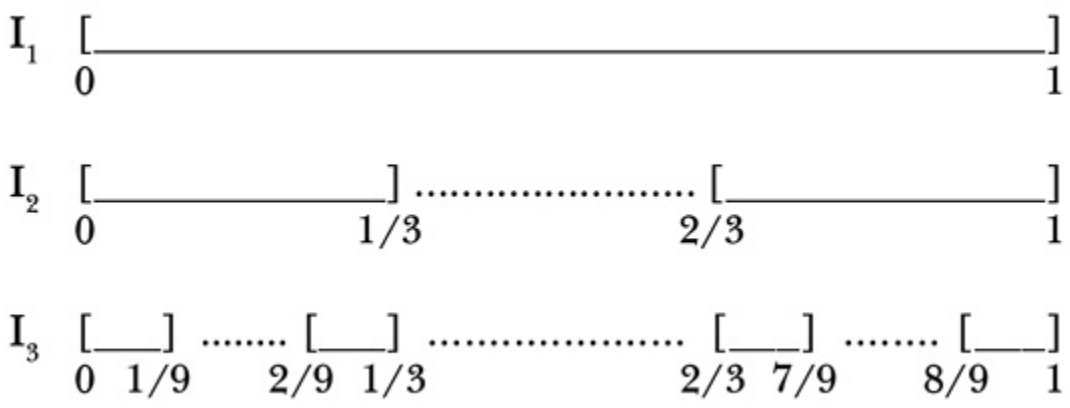
Aristóteles parece aceptar la parte de razonamiento que rebate Parménides, pero se opone a la tesis de que un elemento de longitud nula es necesariamente irreal: «Una cosa indivisible puede ciertamente existir» (*Metafísica*, 1001 b 14). De hecho, Aristóteles admite la existencia del punto geométrico, al que llama generalmente *stigmé*, un término que alude a una especie de perforación, y por tanto de efectiva focalización en el espacio. Euclides, Arquímedes y otros autores posteriores utilizan en cambio el término *semeîon*.[79] Proclo encontraría en los puntos una connotación de «materialidad inteligible»; así, explicaría que el punto es materializado «en cuanto aparece en los recovecos de la imaginación (*Comentario al I libro de los «Elementos» de Euclides*, 96). La inteligencia dianoética asigna a la unidad abstracta una posición en el espacio, la transforma en punto, encontrando en la imaginación (*phantasía*) una figura adecuada de ella, aunque obligada a una existencia material y espuria. También Agustín anotaría en los *Soliloquios* la diferencia entre una figura verdadera, objeto de la inteligencia, y la creada por la imaginación, llamada por los griegos *phantasía*, o bien *phántasma*.

Aunque Aristóteles asigna realidad al punto geométrico, niega que el punto exista como algo material, y cuando habla de las teorías atomistas es generalmente para rebatirlas. El punto se puede definir atómico porque es indivisible, pero no porque sea asimilable a un átomo corpóreo: «ningún cuerpo es un punto indivisible» (*Sobre el cielo*, 296 a 17-18). Esto no implica, no obstante, que para Aristóteles los puntos, como cualquier otro ente matemático, tengan una realidad separada de la realidad sensible: «Si sucede que los entes que aborda la geometría son cosas sensibles, esta no los estudia en cuanto sensibles, y las ciencias matemáticas no serán ciencias de lo sensible; sin embargo, tampoco serán ciencias de otros objetos separados de lo sensible» (*Metafísica*, 1078 a 1-5).

El punto se distingue de la unidad (*monás*) solo por su situación en el espacio. Para Aristóteles «el punto es una unidad que posee posición», pero la línea no está compuesta de puntos, no hay continuidad entre dos puntos, y un punto no es parte de una línea (*Generación y corrupción*, 317 a 10; *Física*, 215 b 19-20), de la misma forma que el tiempo no está compuesto de instantes. Si acaso la línea es generada por el punto por medio de un movimiento (*Sobre el alma*, 409 a 4), y entonces la realidad del punto se encuentra nuevamente en su capacidad de producir un tamaño por medio de una especie de prolongación o de crecimiento.

¿Qué significa que una línea no está *hecha* de puntos o *compuesta* por puntos? El argumento de Zenón se apoya solo en una idea intuitiva de composición, de suma o sustracción de elementos, pero la argumentación se complica si se tienen en cuenta los diferentes significados que teorías más recientes asignan a términos como *suma*, *dimensión*, *conjunto* o *tamaño*. ¿El tamaño del conjunto es medido por su dimensión, o bien por su cardinalidad (o potencia)? Dimensión y cardinalidad podrían no depender la una de la otra, porque se pueden concebir conjuntos lineales de puntos de longitud nula, pero con la cardinalidad del continuo. El conjunto *ternario* de Cantor tiene precisamente estas características: se compone de todos los números comprendidos entre 0 y 1 que tienen una representación en base 3 en la que no aparece nunca una cifra igual a 1 (es decir, las cifras son 0 o 2).

Geométricamente, el conjunto se obtiene considerando el intervalo [0,1] y recortándole repetidamente el primer tercio y el último tercio.



Se obtiene así una sucesión ilimitada de subconjuntos del conjunto de los números comprendidos entre 0 y 1, cada uno de los cuales es la unión de intervalos cerrados disociados. El conjunto ternario de Cantor, que es la intersección de todos estos conjuntos, *no es numerable*, porque está en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números reales mayores o iguales a cero y menores que 1; pero sí es *discontinuo*, está interrumpido por todas partes por saltos (el conjunto de las lagunas es denso por todas partes porque entre las lagunas, en cualquier caso cercanas, siempre hay otra) y su longitud es nula. Se obtiene así un conjunto de puntos en el intervalo [0, 1] que tiene la potencia del continuo y una longitud igual a cero.

Sin embargo, es posible que objetos de dimensión nula, como los puntos de una línea, puedan formar un conjunto, la línea, de mayor dimensión, es decir, de dimensión 1, y la métrica euclidiana definida coherentemente sobre el continuo puede asignar una longitud mayor que cero a conjuntos de puntos individuales de longitud nula. De ese modo, a un intervalo de la recta real con extremos A y B se le asigna una longitud igual precisamente a $b - a$, donde a y b son números reales correspondientes a los puntos A y B. Si a es distinto de b, dicha longitud es un número distinto de cero, aunque el

segmento de recta trazado desde *A* hasta *B* esté compuesto por puntos sin extensión. La teoría métrica del continuo, admitida como coherente, tendría entre sus consecuencias una refutación de las argumentaciones que apoyan la paradoja de Zenón sobre la pluralidad.

Aun suponiendo que el universo esté formado por cuerpos contiguos, observaba Aristóteles (*Generación y corrupción*, 325 a), si este es completamente divisible, no hay ni unidad ni multiplicidad, todo es vacío, y por otra parte no se sabe cómo poder sostener que existen fragmentos de extensión indivisibles, que serían puras ficciones. Este riesgo de asomarse al vacío de la ficción como a la inconsistencia de la convención explica también el antiguo motivo de atracción por los números como base de lo real. Desde las antiguas teorías atomistas, que Aristóteles tampoco aceptaba, la solución de las paradojas de Zenón se centró en un posible elemento de realidad, que podía consistir en los números y en sus relaciones, y en su capacidad de medir las figuras geométricas, las relaciones de equivalencia y de similitud. La tensión problemática entre aritmética y geometría, entre números y puntos de la recta, revela todas las dificultades inherentes a este programa. La búsqueda de actualidad contra la indeterminación de una regresión o de una progresión *in infinitum* debía de ser, en concreto, el propósito de las tesis atomistas de Leucipo y de Demócrito. Este proclamaba las cualidades de los objetos como fruto de la costumbre y de la convención: «Por convención es el color, por convención lo dulce, por convención lo amargo, mientras que reales (*etehêi*) son solo los átomos y el vacío» (68 B 125 DK). Sin embargo, también sostenía que «no conocemos nada real: de hecho, la verdad está en lo profundo» (68 B 117 DK).

Más tarde, Lucrecio utilizó el mismo argumento de la dicotomía de Zenón para demostrar que la existencia de los átomos es la única alternativa a una completa disolución de lo real (*Sobre la naturaleza*, I, 615-627):

> Considera además que si no se admitiera un término mínimo, e indivisible, el cuerpo, incluso el más pequeño, estaría compuesto por infinitas partes, ya que la mitad de cada parte de un cuerpo dividido

> tendría siempre una nueva mitad y nada pondría fin jamás a ese proceso. ¿Y cuál sería entonces la diferencia entre cosas grandes y mínimas? Ninguna; y por infinito que sea este universo, los átomos estarían compuestos igualmente de partes infinitas; y ya que la verdadera razón (*ratio vera*) protesta contra esto y los sentidos impiden creerlo, es necesario admitir, vencidos, que los átomos, no formados de partes, los mínimos cuerpos existentes en el mundo, existen: y como los átomos existen, son también de sólida y eterna naturaleza.

Contrariamente a una creencia muy extendida, la matemática *no* nace como una pura abstracción, como un modelo abstracto de la realidad física. El principio de realidad tuvo que ser confiado, inicialmente, a un tipo de atomismo numérico, en oposición a lo irreal evocado por la división ilimitada del continuo. Los números, las relaciones y los algoritmos nacen en oposición al *ápeiron*, a lo infinitamente grande y a lo infinitamente pequeño. Esto es evidente en el caso de los pitagóricos: sus números, concebidos como secuencias ordenadas de puntos separados en el espacio, parecen responder precisamente al objetivo de crear un universo de entidades existentes de forma actual y efectiva; no una abstracción, como podría parecer, sino como una realización eficaz de la sustancia de las cosas.

Según Aristóteles (*Metafísica*, 1080 b 16 y 1036 b 8; 58 B 9 y 58 B 25 DK), los pitagóricos sostenían que las sustancias sensibles se componen del número, que todo el universo está hecho a partir del número, y que figuras geométricas como el círculo y el triángulo deben ser consideradas del mismo modo que las carnes y los huesos del hombre, o que el bronce y la piedra de una estatua. El propio Platón, recuerda Aristóteles (*Metafísica*, 987 b 22; 58 B 13 DK), pensaba que los números son causa de la sustancia de las cosas, incluso equiparables a las mismas cosas. Leucipo y Demócrito seguirían después esta línea; de hecho, Aristóteles nos recuerda que los atomistas pensaban, exactamente igual que los pitagóricos, que «todas las cosas que existen en el universo están hechas de números, o se desarrollan a partir de números» (*Sobre el cielo*, 303 a 8-9). El elemento inmanente,

constitutivo (*stoicheîon*), de los números era el uno, como el punto lo era de la línea. El uno y el punto son pequeños, simples, indivisibles, están presentes por doquier, circunstancia que indujo a los filósofos a considerarlos como principios (*Metafísica*, 1014 b).

Este programa de los pitagóricos y de los atomistas fue perfeccionado por la matemática del siglo XIX, cuando Weierstrass, Cantor, Dedekind y otros desarrollaron una teoría coherente del continuo numérico, definido por el campo que incluye a los números racionales e irracionales. Puede comprenderse de este modo cuán importante era establecer que los números irracionales *existen* y tienen el mismo estatuto ontológico que los números enteros naturales.

[79] Euclides, *Elementos*, I, 1: «Un punto es lo que no tiene partes». El término *semeîon*, utilizado por Euclides, parece asignar al punto un grado de irrealidad menor que el término aristotélico *stigmé*, que alude a una especie de focalización. Cfr. T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's «Elements»*, vol. I, cit., pp. 155-156.

10

Límite e ilimitado
Inconmensurabilidad y algoritmos

¿Por qué los números enteros y los algoritmos, al contrario que los números irracionales o que el concepto de continuo, tienen una realidad indiscutible? Si seguimos el criterio platónico para definir lo que es real y lo que no lo es, deberíamos retomar el pasaje del *Filebo* (16 c) en el que se afirma, gracias a una sabiduría heredada de los antiguos, más cercanos a los dioses, que «las realidades que decimos que existen siempre, estando constituidas por uno y por muchos, tienen integrado en sí el límite y lo ilimitado». Se trataba de una visión no alejada de la de Parménides, quien afirmaba, según Proclo, que «el ser es uno solo en cuanto al concepto (*eîdos*), pero múltiple en cuanto a la evidencia de la experiencia sensible (*enárgeia*)» (29 A 15 DK).

Para Platón el número entero natural, el *arithmós*, es justo lo que está en medio (*metaxý*) del uno y del infinito (*Filebo*, 16 d-e), entre el límite y lo ilimitado, lo que media entre el uno y el otro. Con los algoritmos se podía calcular, es decir, *producir* números y relaciones entre números, y dicha producción se realizaba entre dos polos opuestos, que eran precisamente el uno concebido como *lógos* seminal, y lo ilimitado, el crecimiento indefinido de números o de figuras geométricas en diferentes escalas. Números y relaciones se generaban a partir de la unidad en sucesiones prolongables hasta el infinito, por sucesivas operaciones de división,[80] formando un espeso tejido intermedio que era la *realidad* o una representación adecuada de ella. Para aproximar las entidades que nosotros

llamamos ahora números irracionales, ya existía lo que Cantor llamaría *secuencias fundamentales*, secuencias de fracciones convergentes en un punto de la recta real. Pero para los griegos la realidad no consistía en lo que Dedekind llamaría «sección» del cuerpo racional, o en el número con infinitas cifras decimales que nosotros designamos, por ejemplo, con el símbolo $\sqrt{2}$. Aquella era una laguna indecible, no un ente al que se pudiera atribuir una existencia actual. Así pues, faltaba una idea concreta de aproximación numérica: no había un ente para aproximar, y por tanto ni siquiera era pensable una distancia entre la fracción y el límite de la secuencia. La realidad de las relaciones entre magnitudes geométricas inconmensurables, como la diagonal y el lado de un cuadrado, se encontraba por completo en las relaciones entre enteros, en los *lógoi* efectivamente calculados y en la ley que permitía calcularlos. Esta circunstancia no impedía, sin embargo, en algunos casos, asociar a una línea geométrica un número entero capaz de medirla de forma aproximada, incluso en el caso de que la línea fuera, por ejemplo, la diagonal de un cuadrado de lado 1. Para Platón (*República*, 546 c) la diagonal racional de 5, es decir, $7 = \sqrt{49}$, podría ser equivalente a $\sqrt{50}$, es decir, a la longitud exacta de la diagonal del cuadrado de lado 5. El número $7 = \sqrt{49}$ es un número entero, mientras que $\sqrt{50}$, que es un número irracional, para los griegos era una laguna, una entidad no representable por medio de números enteros.

El discurso de Platón se basa en el teorema de Pitágoras aplicado a un triángulo rectángulo cuyos dos lados tienen longitud 5. Como la suma de los cuadrados de los lados es igual al cuadrado de la hipotenusa, de la igualdad $5^2 + 5^2 = 50$ se deduce que la hipotenusa tiene una longitud de $\sqrt{50}$. La raíz cuadrada de 49 es una aproximación que tiene la ventaja de coincidir con un número entero natural, 7, en lugar de con un número irracional como $\sqrt{50}$. Las construcciones con cuerdas y estacas de los altares védicos descritos en los *Vulvasutra* se sirven de una aproximación análoga, es decir, $5^2 + 5^2 \approx 49$.[81] Por otra parte, la medida de la longitud de un cuerpo cualquiera no es exacta y consiste por regla general, leemos en el texto, «en el menos y en el más».[82] El concepto de aproximación, solo

expresado veladamente en los procedimientos numéricos de la matemática antigua, se convertiría después en una clave de todo el pensamiento matemático. Porque desde tiempos inmemoriales (se encuentran claras alusiones, por ejemplo, en los tratados védicos) se sabía que las magnitudes no pueden ser medidas exactamente, sino solo con aproximaciones por exceso o por defecto.

La cuestión de cómo se pueden aproximar los números irracionales no afectaría solo a los aspectos de aplicación del cálculo. Las técnicas para medir los grados de aproximación pasarían a ser las mismas del pensamiento matemático. De hecho, la definición euclidiana de relación es deudora de las anteriores técnicas de aproximación numérica por exceso y por defecto; la definición del límite debida a Weierstrass debe su lógica a la existencia de algoritmos numéricos (aparecen en ella también los símbolos ε y δ, que designaban con anterioridad el *error* de aproximación); las fórmulas analíticas utilizadas para aproximar una función sirven para definir conceptos generales, como la estabilidad de un sistema de cálculo; un teorema demostrado en 1844 por Joseph Liouville (véanse las páginas 139-140) establece el grado de aproximación alcanzable al aproximar las raíces de una ecuación algebraica, y permite también cuantificar un fenómeno clave en el cálculo automático: la velocidad de crecimiento de los números calculados.

Podemos avanzar algunas conjeturas sobre los instrumentos que permitieron descubrir, antes de Euclides, la existencia de magnitudes geométricas inconmensurables. Observamos enseguida, por tanto, que eran posibles varias *demostraciones* de la inconmensurabilidad de la diagonal y del lado de un cuadrado, y diferentes *procedimientos* para calcular aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$. Pero en ellas encontramos, invariablemente, el tema del crecimiento o decrecimiento de las magnitudes. En una de las demostraciones posibles, interviene el criterio dicotómico de Zenón, aunque Aristóteles (*Analíticos primeros*, 65 b 16-21) parece poner en duda la posibilidad de tal proximidad entre la inconmensurabilidad y las técnicas de generación de las paradojas. El método dicotómico llevaba en cualquier caso a la construcción de una

sucesión ilimitada de cuadrados, y se repetía así el esquema de siempre: a partir de un núcleo inicial, formado por una figura geométrica, construir infinitas parecidas a la primera. Suponiendo, por reducción al absurdo, que diagonal y lado son conmensurables, se construye una secuencia de cuadrados en escala decreciente, por sucesivas reducciones a la mitad, asociando cada vez a diagonal y lado, como consecuencia de la hipótesis inicial de conmensurabilidad, un número entero positivo. Los segmentos lineales se vuelven cada vez más pequeños, así como los números correspondientes. Pero la secuencia de diagonales y lados es ilimitada, mientras que la secuencia decreciente de números no puede serlo; de ahí el absurdo.[83]

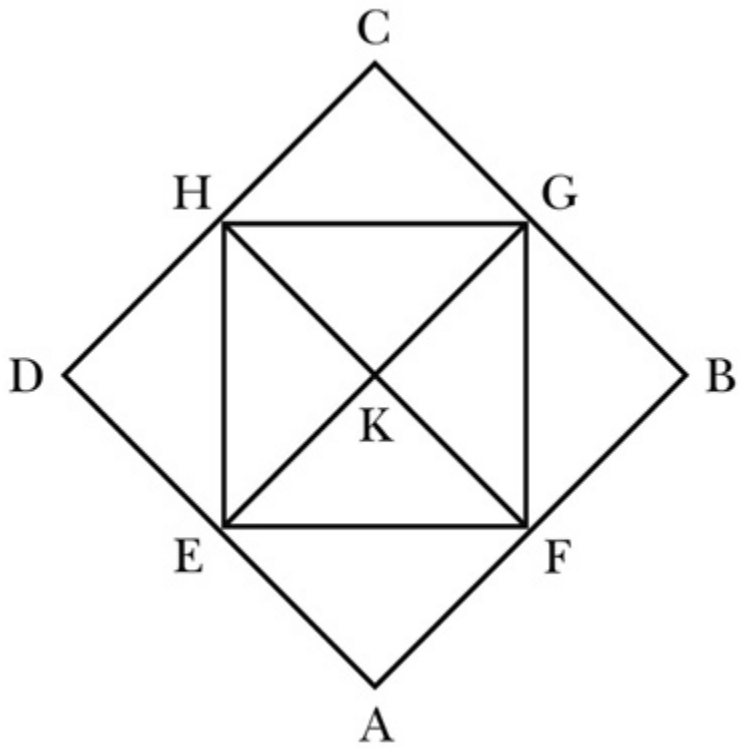


Figura 5

Si se supone que es absurdo (Figura 5) que la diagonal EG del cuadrado EFGH sea conmensurable con el lado EF (en la figura, E, F, G y H son los puntos intermedios de los lados del cuadrado ABCD), se debe poder

expresar la relación EG : EF como una relación entre dos números enteros *d* y *s* (Euclides). Ahora bien, el cuadrado ABCD y el cuadrado EFGH representan respectivamente d^2 y s^2, que, como se ve en la figura, uno es el doble del otro. Por consiguiente, d^2 es un número par y, como el cuadrado de un número impar es impar, también AB es par. Eso implica que su mitad AF representa un número entero. Ahora bien, EF representa un entero y por ello la relación entre EF y AF es una relación entre enteros. Se ha construido por tanto EKFA, cuyo lado es la mitad del lado del cuadrado ABCD y tal que su diámetro y su lado representan números enteros. La construcción se puede repetir de forma indefinida, generando sucesivamente cuadrículas más pequeñas, con el lado reducido cada vez a la mitad del anterior, pero siempre medido por un número entero. Los números se vuelven cada vez más pequeños, así como los cuadrados; pero mientras que los cuadrados, que son tamaños continuos, pueden empequeñecerse indefinidamente, los números enteros no pueden volverse menores que uno. El crecimiento indefinido de los números es incompatible con la indefinida reducción de las líneas a la mitad, porque el proceso debería concluirse necesariamente en un segmento unitario o medido por un número impar. El método dicotómico ofrece, por tanto, un perfecto ejemplo de esa suerte de incompatibilidad entre números y figuras geométricas que llevaría al descubrimiento de magnitudes inconmensurables.

El método dicotómico no era el único recurso posible para estudiar la inconmensurabilidad. Una demostración afín a la anterior, que podría situarse en el origen del estudio de la inconmensurabilidad, se hallaba estrechamente unida a un algoritmo que permite aproximar, con la precisión requerida, la relación entre diagonal y lado de un cuadrado. Los dos procedimientos, demostración y algoritmo, son como las dos caras de la misma moneda, el uno es inverso al otro, y pueden ilustrarse nuevamente con la construcción de un número indefinido de cuadrados. La base del procedimiento demostrativo es la *antanaíresis* o *anthyphaíresis*, el proceso de las sucesivas sustracciones conocido como «algoritmo euclidiano», la técnica para encontrar el máximo común divisor de dos magnitudes con el cálculo de cocientes y restos. Dado un cuadrado ABCD (Figura 6), se lleva

sobre su diagonal BD = *d* un segmento BE igual a su lado *l*. Esta operación no es otra cosa que la división de *d* por *l*, cuyo resultado es 1 con un resto igual a ED. Se asume, por tanto, como lado *l'* de un sucesivo cuadrado más pequeño el resto ED, menor que la mitad de *d*, y se procede construyendo a partir del cuadrado de lado *l'* y diagonal *d'* = DF = *l* un tercer cuadrado con el mismo procedimiento. La construcción se puede repetir indefinidamente, y en cada cuadrado Q la diagonal *d* es igual a la suma del lado más el lado del cuadrado sucesivo menor Q', es decir, $d = l + l'$, mientras que el lado *l* es igual a la suma de la diagonal y del lado de Q, es decir, $l = d' + l'$.[84]

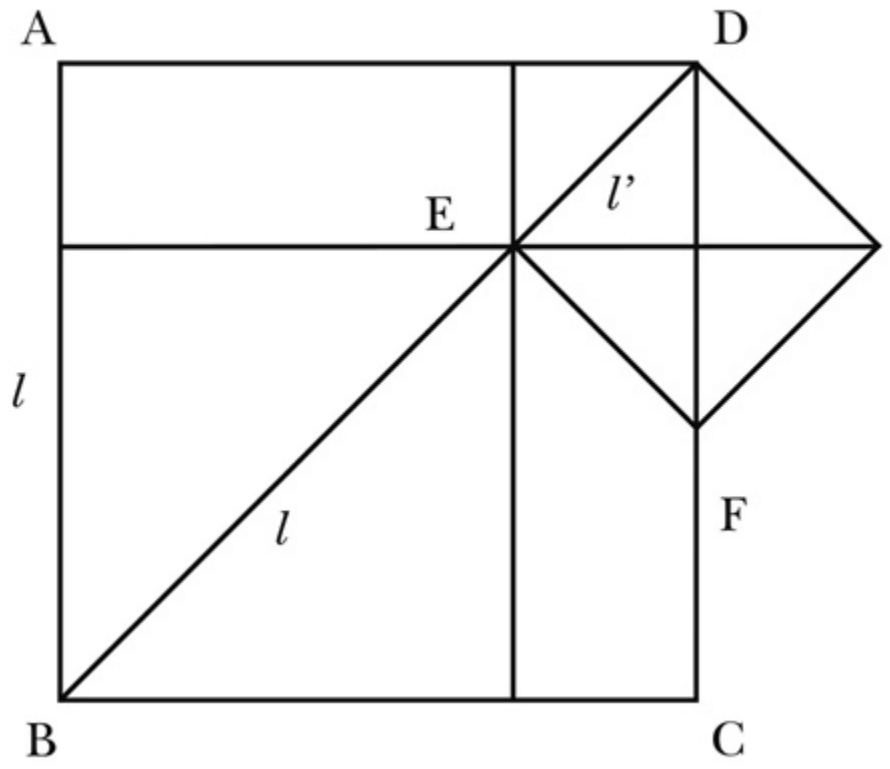


Figura 6

El razonamiento se desarrolla por reducción al absurdo. Si la diagonal BD y el lado BC del cuadrado más grande son conmensurables, entonces ambos son múltiplos exactos de una misma unidad de medida U. Por tanto,

también la diferencia BD − BC = EF y la diferencia DC − FC = DC − EF = DF son múltiplos de la misma unidad de medida U (porque son diferencias entre múltiplos de U). Es decir, el lado y la diagonal del cuadrado menor son conmensurables y múltiplos exactos de U. Construyendo cuadrados cada vez menores, cada diagonal y cada lado se convierten en un múltiplo de U. Pero estos múltiplos son cada vez menores: si fuera, por ejemplo, BC = 40U, entonces sería como máximo EF = 39U. Cada lado sería igual a *nU*, siendo *n* igual a un número entero positivo cada vez menor. Pero *n* no puede llegar a ser menor que 1, mientras que los cuadrados sí pueden disminuir indefinidamente. Por tanto, la conclusión es que la diagonal y el lado de un cuadrado no son conmensurables (*Elementos*, X, 2).[85]

Ahora bien, hay que observar que el recorrido inverso en escala creciente, desde un cuadrado menor a cuadrados cada vez mayores, se realiza con una transformación que es exactamente la contraria a la anterior: ambas transformaciones se identifican por dos matrices de dos filas y dos columnas de las que una es la inversa de la otra.[86] Con la sucesión de lados l y diagonales d que aumentan progresivamente se construyen las relaciones $d : l$ que aproximan $\sqrt{2}$. En otras palabras, se obtiene un algoritmo, un proceso de cálculo de números racionales (las fracciones d/l) que, al aumentar l, es decir, al disminuir $1/l$, se acercan progresivamente a la raíz cuadrada de 2 (sin alcanzarla nunca). Es el mismo algoritmo de los números laterales y diagonales del que habla Teón de Esmirna (siglos I-II) en su *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*. Una demostración clara de la coexistencia de lo «grande» y de lo «pequeño» como designación platónica del *ápeiron*: «los números d y l son cada vez mayores, mientras que la unidad de medida $1/l$ es cada vez menor». También la *distancia* de la relación $d : l$ desde $\sqrt{2}$ se hace cada vez más pequeña al crecer l, pero nunca puede anularse, lo cual podría servir perfectamente de argumento para comprender que la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables.[87] Se puede afirmar que 2 es exactamente el límite de la sucesión de relaciones $d^2 : l^2$. De hecho, se puede calcular l de forma que la distancia entre 2 y la relación $d^2 : l^2$ sea menor que una cantidad ε arbitrariamente pequeña, porque esa distancia es

igual a $d^2 : l^2 - 2 = \pm 1/l^2$. Eso significa que la sucesión de relaciones se hace cada vez más densa en la proximidad de 2: establecida una fracción ε arbitrariamente pequeña (por ejemplo $\varepsilon = 1/n$, con n igual a un número muy grande), existe un número *infinito* de relaciones $d^2 : l^2$ que dista de 2 *menos* que ε, mientras que solo un número *finito* de relaciones dista de 2 *más* que ε. En términos de fracciones, diremos que la secuencia de fracciones d^2/l^2 *converge* a 2, o bien que d/l *converge* a $\sqrt{2}$.

Esta forma de concebir el límite, cercana a la formulación moderna de Cauchy y de Weierstrass, es en cierto sentido no intuitiva, pero responde a un criterio matemático más preciso. En el caso de las sucesiones de relaciones o fracciones d/l, podríamos repetir cuanto ya se ha dicho a propósito del límite de una función. Intuitivamente, seríamos proclives a observar el funcionamiento de la sucesión de fracciones en sentido dinámico, como si se tratara del movimiento de una fracción que tiende a acercarse gradualmente a un punto de llegada. Pero el funcionamiento dinámico, como era concebido generalmente en el análisis infinitesimal del siglo XVIII, no encuentra una clara formulación matemática, y da lugar a equívocos sobre el alcance efectivo del límite. La definición más rigurosa invierte la perspectiva: se elige *primero* un entorno arbitrariamente pequeño del límite L (de radio ε) y se determina, con base en ello, a partir de qué punto el término genérico de la sucesión está definitivamente en ese entorno. La misma noción del límite según Cauchy y Weierstrass, inspirada en una idea opuesta a la de una tensión dinámica, se ajusta a una connotación estática y atomista de los números, y contribuye a una noción del infinito en sentido actual, más que potencial.

No está de más señalar que este cambio de perspectiva de la definición moderna del límite de una sucesión sigue de cerca la lógica del cálculo aproximado. En la *computatio* algebraica que precedió a Cauchy y Weierstrass, el símbolo ε denotaba típicamente el error residual en el cálculo de un número irracional mediante una secuencia de fracciones detenida en un cierto término (a una distancia ε de la solución). El error ε podría ser preasignado con el fin de establecer un criterio de detención. Análogamente, en la sucesión de fracciones d^2/l^2 se puede decidir detener el

procedimiento cuando el error residual ($1/l^2$) es menor que una fracción ε preestablecida.[88]

La secuencia de relaciones $d^2 : l^2$ define una secuencia de intervalos I_1, I_2, ..., I_k, ..., cada uno de los cuales incluye el número 2 y tiene como extremos una aproximación suya por defecto y otra por exceso. Los intervalos están comprendidos el uno en el otro y se hacen cada vez menores alrededor de 2, pero su longitud nunca se hace nula. Análoga conclusión vale para las relaciones $d : l$. Pero en este caso los intervalos contienen una entidad de naturaleza distinta a 2, no un número entero, sino un número cuyo cuadrado es igual a 2, designado por el símbolo $\sqrt{2}$. Ahora bien, no es posible obviar la intuición de la actual presencia de esta entidad, aunque sea irracional, sino que se debe considerar que existen realmente, en oposición a la indefinición del *ápeiron*, solo las relaciones $d : l$. Se puede entonces definir el número $\sqrt{2}$ con la misma secuencia de infinitos intervalos que lo contienen, porque los extremos de tales intervalos son los números racionales efectivamente calculables iguales precisamente a las relaciones $d : l$. En tal caso podemos inclinarnos a sustituir la gradualidad de la aproximación por un ente individual, un símbolo que corresponde a un nuevo número y que designa la secuencia de intervalos.

Si pensamos ahora en cualquier número irracional como una indefinida secuencia de intervalos que lo contienen, y lo designamos con un símbolo, tendemos a concebir un nuevo dominio de símbolos-números como una multiplicidad de infinitos individuos separados. Un paso decisivo, este último, favorecido por la posibilidad de definir formalmente una aritmética, entre estos símbolos-números, análoga a la de los números racionales.

Una circunstancia decisiva es también la siguiente: la secuencia indefinida de intervalos incluidos el uno en el otro da lugar a una *separación* del conjunto de todos los números racionales en dos clases. La primera clase contiene todos los números racionales que están a la izquierda de los intervalos I_k, para k suficientemente grande, es decir, que son menores que el extremo izquierdo de todos los intervalos I_k, salvo un número finito de ellos. La segunda clase contiene los números racionales mayores que el

extremo derecho de todos los intervalos I_k, salvo un número finito de ellos. A estas dos clases se añade una tercera formada por los números racionales contenidos en todos los intervalos. Ahora bien, la tercera clase, si no está vacía, contiene un único número racional *r*. Entonces, la primera clase y la segunda clase contienen todos los números que son, respectivamente, menores y mayores que *r*, y la secuencia de intervalos *representa* el número *r*. Si la tercera clase está vacía, es decir, no contiene ningún número racional, la secuencia de intervalos *representa* un número irracional.

Esta división del conjunto de los números racionales es precisamente lo que Dedekind, a finales del siglo XIX, definiría como una *sección* del cuerpo racional. Los números *reales*, los racionales y los irracionales, serían entonces concebidos como secciones. Pero el concepto de sección se encuentra ya implícito en la matemática griega, concretamente en el mecanismo de la *antanaíresis* y en la construcción de las relaciones *d/l*. El razonamiento es semejante al propuesto por Poincaré en *La ciencia y la hipótesis* (1902): nos sentimos casi obligados a concebir un número, aunque sea irracional, de la misma forma que nos sentimos obligados a reconocer como existente y real el punto *P* de intersección entre dos curvas en el plano cartesiano, acercándonos desde la derecha y desde la izquierda con abscisas racionales cada vez más próximas a la abscisa de *P*.

Resulta sorprendente la presencia simultánea, en las *mismas* fórmulas recursivas con las que se calculan los números laterales y diagonales, de una demostración de no existencia (no existe una medida común *m*) y de la efectiva construcción de aproximaciones racionales de lo que, en el campo racional, no puede existir. Son las dos caras de la matemática distinguidas por Proclo: una, teórica; la otra, problemática. Con la primera, se trata de establecer un resultado teórico, como la existencia o la inexistencia de una solución racional; con la segunda, se construye efectivamente la solución, o bien una fracción que la aproxima si aquella no existe. Dos razonamientos complementarios que se materializan en las mismas fórmulas.

La construcción de los cuadrados de dimensión cada vez mayor o cada vez menor es un proceso ilimitado, no tiene fin. Sin embargo, incluso a falta

del último paso, la forma y la regularidad del proceso permiten llegar a una tesis concluyente que atañe a toda la sucesión de cuadrados y a una *infinidad* de posibles opciones. En ello está implícito lo que en lógica se llama cuantificador universal: *cualquier* segmento, por pequeño que sea, no puede ser una medida común de la diagonal y del lado de un cuadrado. Tenemos una *demostración de no existencia*, pero al mismo tiempo abordamos también, por medio de una evidencia geométrica, una realidad. *Realidad* y *existencia* no coinciden en absoluto, son dos conceptos que actúan en diferentes planos.[89] Real es algo que se afirma por necesidad, no por una convención. Es más, el convencionalismo falsearía su naturaleza, debilitando ese carácter de inevitabilidad y de mandato impuesto por las mismas fórmulas, por el mismo algoritmo. Nosotros no recibimos nada, son los números los que se disponen según una ley propia, independiente de nuestro arbitrio.

La sucesión de los lados l y de las diagonales d de los cuadrados, tomados en escala creciente, es infinita, pero la sucesión de las relaciones $d : l$ tiene un *límite*, representado por lo que llamamos «raíz cuadrada de 2», porque la relación $d^2 : l^2$ converge a 2.[90] Los conceptos de relación y límite, unidos al cálculo de aproximaciones cuya distancia del límite decrece progresivamente, permiten obviar la indeterminación del *ápeiron*. Aunque abierto y potencial, el *ápeiron* es, por decirlo así, perfeccionado por el límite, y obedece a una regularidad de desarrollo a partir de la cual se extraen conclusiones *finales*. En el concepto matemático de relación, se encontraba así el antídoto a la indefinición del *ápeiron*, y la progresiva generación de los números d y l se capta «de una sola vez lo ilimitado, porque lo ilimitado está limitado por una relación que se capta de una sola vez».[91] Es exactamente lo que dice Platón en el *Filebo* (16 c): el ente cognoscible, real, es una combinación de límite e ilimitado.

En Jámblico, en Teón de Esmirna y en Proclo, es decir, en las fuentes que más se extienden en los detalles del algoritmo, no se percibe ninguna alusión explícita al hecho de que las relaciones $d^2 : l^2$ se acerquen a 2. Platón, se ha recordado, alude a la «diagonal racional de 5» (literalmente: la diagonal efable, expresable), es decir, al número 7, que sabemos que es una

aproximación de la diagonal del cuadrado de lado 5, que es, por el contrario, irracional o, mejor dicho, secreta, indecible. Pero no encontramos el concepto de aproximación, excepto en la contraposición entre racional e irracional. Solo en un pasaje del *Político* (287 c) el Extranjero de Elea se refiere a la *diaíresis*, a la estrategia de búsqueda por divisiones sucesivas, diciendo que «hay que dividir siempre, todo lo posible, según el número más cercano a dos», casi de la misma forma en que se corta una «víctima sacrificial». Esta *cercanía*, en griego *engýtes*, podría aludir a la reducción de las distancias, a la condensación de las relaciones que tienden al número irracional. Los números irracionales como $\sqrt{2}$ serán definidos formalmente, en el siglo XIX, como sucesiones de los números racionales p/q (siendo p y q números enteros) que se condensan cada vez más cerca de su límite.

Interpretado como la «diagonal racional de 5», el número 7 alude a la posibilidad de expresar lo irracional con lo racional por medio de los números. En las relaciones entre números (enteros positivos), encontramos la expresión real, concreta y actualizada de lo que conseguiríamos expresar solo negativamente como relación entre magnitudes de las que no existe una unidad de medida común. Una circunstancia reforzada por el comentario de Teón de Esmirna, para quien la unidad (*monás*), que es el valor inicial tanto del lado l como de la diagonal d, en función del cual se construyen las relaciones $d : l$, «como principio de todas las cosas, debe ser en potencia (*dynámei*) tanto lado como diagonal».[92] En la *dýnamis*, como quería Platón (*Epinomis*, 990 c), se encontraba la *realidad* de los entes numéricos con los que se podría expresar lo indecible. El hecho destacable, ya evidente en la matemática griega y en los cálculos védicos, será que las relaciones de equivalencia y las operaciones de agrandamiento o de empequeñecimiento de las figuras *geométricas* están generalmente en estrecha relación con análogas operaciones recursivas sobre magnitudes *numéricas*. Estas operaciones hacen crecer los números enteros p y q, que definen las fracciones p/q, que a su vez aproximan las relaciones entre magnitudes inconmensurables; y la inconmensurabilidad es visible, al mismo tiempo, en el comportamiento al límite de secuencias de figuras parecidas que crecen o disminuyen.

Ahora bien, se sabe que la aproximación mejora al crecer el numerador *p* y el denominador *q* de la fracción, una circunstancia ya apreciable en los números laterales y diagonales, que aumentan con una ley recursiva. Pero los ordenadores y las personas operan siempre con un número *t* preestablecido de cifras y redondean los números con más de *t* cifras, causando pérdidas irreparables de información al aproximarse al límite. Por este y otros motivos, el ordenador prefiere representar las fracciones *p/q* como números en «coma móvil».[93] Este artificio no basta, porque, como se verá, el agrandamiento de los números puede comprometer la estabilidad[94] de los procedimientos, que es un requisito fundamental de su efectividad.

La inconmensurabilidad tiene que ver con la cuestión de la estructura del continuo. La pregunta central es siempre la siguiente: ¿el continuo está compuesto por partes indivisibles, o bien las partes en que puede dividirse son a su vez indefinidamente divisibles? En un pasaje del tratado *De lineis insecabilibus*, recogido en el *Corpus Aristotelicum* (970 a 14 y ss.), se demuestra la inconsistencia del concepto de línea indivisible. Se considera una sucesión de cuadrados regulada por una *antanaíresis*, el algoritmo euclidiano para el cálculo del máximo común divisor entre diagonal y lado. Si por absurdo hubiera una línea indivisible, se argumenta que esta sería el lado de un cuadrado cuya diagonal, dividida por el lado, daría como resto una línea de longitud menor que el lado; de lo contrario, el cuadrado construido sobre la diagonal sería al menos 4 veces mayor que el primero, en lugar de 2. Se encontraría entonces una línea menor que el lado, considerado indivisible; de ahí el absurdo. Por este motivo, Aristóteles podía afirmar que las tesis atomistas van en contra de lo que los matemáticos son capaces de demostrar, incluida, como cabe imaginar, la inconmensurabilidad de la diagonal y del lado de un cuadrado.

La posibilidad de representar los números *d* y *l* mediante sucesiones ilimitadas de figuras semejantes se halla recogida en toda la literatura, si bien con diferentes acentuaciones e implicaciones geométricas. Las fórmulas generadoras de los números *d* y *l* parecen estar relacionadas con una variante de la fórmula algebraica correspondiente a un teorema de Euclides (*Elementos*, II, 10), de la que es posible extraer una ley de

deconstrucción de sucesiones de cuadrados. Esto demuestra que en los *Elementi* no se encuentra solo, según una tesis dudosa y ampliamente discutida, un álgebra geométrica, o sea, un álgebra revestida del lenguaje geométrico, sino también una *computatio geometrica*, un cálculo numérico cuya estructura está relacionada con propiedades de figuras geométricas. Hay que distinguir los dos aspectos, porque las fórmulas algebraicas no son algoritmos. Por ejemplo, la fórmula que designa el producto de tres números, $a \times b \times c$, corresponde a *dos* posibles procedimientos, sugeridos por las dos expresiones respectivas $(a \times b) \times c$ y $a \times (b \times c)$, que pueden dar dos resultados completamente distintos.[95]

Hay finalmente un nexo esencial que conecta la demostración de inconmensurabilidad realizada por medio de la construcción indicada por la Figura 5 con la geometría védica. En la Figura 5, hay presentes 4 cuadrados iguales, concretamente CHKG, BFKG, KFAE y HDEK. Ahora bien, el cuadrado más grande compuesto por estos 4 cuadrados coincide con el cuerpo de uno de los altares védicos principales, señalado en la Figura 1. Trazando las diagonales en cada cuadrado del cuerpo central del altar y repitiendo la operación con el fin de realizar un progresivo anidamiento de figuras geométricas, se demuestra finalmente la inconmensurabilidad del lado y de la diagonal de un cuadrado. La misma construcción lleva también a la demostración intuitiva, inmediata, del teorema de Pitágoras aplicado a triángulos rectángulos con catetos iguales. Se presume que esta demostración era conocida en los tratados védicos sobre la construcción de los altares. Albert Bürk, en su comentario a los *Sulvasutra* de Apastamba, no deja de observarlo y de recordar que el cuerpo central de Agni no es otro que *atman*, el sujeto omnicomprensivo que disfruta del mundo, núcleo central de todo ser viviente y conciencia universal que permanece, más allá del crecimiento y de las múltiples formas, siempre igual a sí misma.[96]

[80] J. Stenzel, *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles*, Teubner, Leipzig-Berlín, 1924.

[81] *The Manava-Vrautasutra*, trad. ingl. de J.M. van Gelder, The Sata-Pitaka Series, vol. XXVII, International Academy of Indian Culture, Nueva Delh

[82] *Ibid*., p. 300. La fórmula recuerda a la análoga fórmula platónica «más y menos» utilizada en los *Diálogos*.

[83] W. Knorr, «Aristotle and incommensurability: Some further reflections», en *Archive for History of Exact Sciences*, XXIV, 1981.

[84] Se tiene $l = d' + l'$ porque d', la diagonal DF de Q', es igual al doble del lado del cuadrado de diagonal l' ($d' = 2\,(l'/\sqrt{2}) = \sqrt{2}l'$) y l' = CF = FE por la congruencia de los triángulos BCF y BFE. Véase W. Knorr, *Aristotle and Incommensurability*, cit. Y H. Rademacher, O. Toeplitz, *Von Zahlen und Figuren*, Springer, Berlín, 1933.

[85] El razonamiento por reducción al absurdo, análogo, en cierto modo, al del método exhaustivo, se basa en el postulado de Arquímedes («dadas dos magnitudes homogéneas, existe siempre un múltiplo de la menor que supera a la mayor»), del que deriva el teorema de Euclides (*Elementos*, X, 1): «Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita a la mayor más de su mitad, al resto más de su mitad, y así sucesivamente, se acabará obteniendo una magnitud menor que la más pequeña». En el caso del cuadrado, si existiera una medida suya común m, con la *antanaíresis* se calcularía un resto no nulo menor que m y divisible por m: un absurdo. El postulado de Arquímedes excluye la existencia de infinitesimales, que, sumados un número arbitrario de veces, nunca superarían cualquier línea asignada. Ninguna de estas entidades podría definir una medida común de dos magnitudes.

[86] Se tiene concretamente: $d = l + l' = 2l' + d'$, $l = l' + d'$ y $l' = d - l$, $d' = 2l - d$, donde d, l y d', l' son la diagonal y el lado, respectivamente, del cuadrado mayor y del cuadrado menor. El vector de componentes d y l se obtiene multiplicando la matriz M con elementos 1 y 2 en la primera fila y 1 y 1 en la segunda fila por el vector de componentes d' y l', mientras que el vector de componentes d' y l' se obtiene multiplicando la inversa de M por el vector de componentes d y l. Las relaciones *geométricas* entre diagonales y lados sugieren un procedimiento *numérico*. Ahora bien, se pueden calcular recursivamente los números d y l estableciendo para ambos un valor inicial igual a 1 y utilizando las relaciones anteriores en el sentido de un crecimiento progresivo de los cuadrados. Los primeros valores calculados serán, respectivamente, 3 y 2. La relación $d : l$ adopta así los valores 1 : 1, 3 : 2, 7 : 5, 17 : 12, 41 : 39, en los que los valores de l aumentan según la ley recursiva arriba señalada.

[87] Lo que se concebía como «relación $d : l$» se puede interpretar también como una «fracción d/l». En ella está implícito el uso de 1 unidad de medida equivalente a $1/l$. La fracción 17/12 denota una cantidad equivalente a 17 veces una unidad de medida igual a 1/12. Al crecer l, la unidad de medida $1/l$ disminuye, y también lo hace la distancia de d/l desde $\sqrt{2}$: otro indicio de la combinación de «grande» y «pequeño», que marca la naturaleza del *ápeiron* platónico.

[88] Véase mi *Gnomon*, Adelphi, Milán, 1999, pp. 343-344, 384-385.

[89] Simone Weil lo señala muy bien con referencias teológicas concretas: «San Juan no dice: seremos felices porque veremos a Dios; sino: seremos semejantes a Dios, porque lo veremos tal y

como es [1 Juan, III, 2: *scimus quoniam cum apparuerit, similes ei erimus, quoniam videbimus eum, sicuti est*]. Seremos bien puro. Ya no existiremos. Pero en esta nada que se encuentra en el límite del bien seremos más reales que en cualquier otro momento de nuestra vida terrestre. Mientras que la nada que se encuentra en el límite del mal carece de realidad. Realidad y existencia son dos cosas diferentes» (*Cahiers*, en *Œuvres complètes*, vol. VI, tomo IV, cit., p. 214; trad. it. cit., vol. IV, p. 209).

[90] Se tiene $d^2 = 2l^2 \pm 1$ y por tanto la relación $d^2 : l^2$ converge a 2 cuando l aumenta indefinidamente. con el crecer indefinido de *l*..

[91] S. Weil, *Cahiers*, en *Œuvres complètes*, vol. VI, tomo III, cit., p. 139 (trad. it. cit., vol. III, p. 135)

[92] I. Thomas, *Greek mathematical works* (1939), Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1967, vol. I, pp. 134-35.

[93] Números de máquina de la forma $(d_1\, d_2 \ldots d_t)\, B^r$, donde *B* es la base de la representación de los números. En este caso, el tamaño del número está representado no por la cantidad de las cifras, sino por el exponente *r*.

[94] La *estabilidad* de un procedimiento de cálculo depende del modo en que se propaga el error debido al redondeo sobre las operaciones aritméticas concretas. El número de tales operaciones, por lo general inaccesibles al sujeto humano, es normalmente muy elevado.

[95] Por ejemplo, si *a* y *b* son números muy grandes, en el primer procedimiento el producto $(a \times b)$ podría ser un número demasiado grande para la memoria del ordenador, y por tanto causar *overflow*. Este inconveniente, que detendría el proceso, podría no producirse en el segundo procedimiento, en caso de que *c* fuera un número lo suficientemente pequeño.

[96] A. Bürk, *Das Apastamba-Vulba-Sutra*, cit., LV, 1901, p. 557. Sorprende la afinidad con el pensamiento de san Agustín, que, en los *Soliloquios*, explica que de la existencia de figuras geométricas se puede deducir la existencia de la verdad y la inmortalidad del alma, es decir, de la inteligencia que las concibe. A una conclusión análoga llevan los discursos de Platón referentes a la *anámnesis* ilustrada en el procedimiento para multiplicar un cuadrado (*Menón*, 85 d).

11

Realidad de los números
Las secuencias fundamentales de Cantor

Las teorías matemáticas del continuo aritmético elaboradas a finales del siglo XX parecieron capaces de rebatir la paradoja de Zenón sobre la pluralidad, basada en el presupuesto de que «una suma finita o infinita de magnitudes inextensas», como los puntos de una recta, «es siempre una magnitud nula». Si este presupuesto llegara a comprobarse, la realidad se desvanecería en el vacío y en el no ser: una tesis inaceptable que, en la lógica eleática, conduciría a la conclusión de que la multiplicidad no existe y que el ser es *uno*. La tesis de Parménides de que el ser es uno, inmóvil, homogéneo, isótropo y continuo, y que toda multiplicidad es ilusoria, no dejaba de ser menos paradójica que las consecuencias derivadas de la existencia de cualquier pluralidad.

La teoría del continuo numérico se basa ante todo en una correspondencia perfectamente unívoca entre puntos de la recta y números reales (números racionales, o fracciones, más números irracionales) que permite considerar la *recta real* como una entidad tanto geométrica como numérica. Esta entidad se puede definir de formas diferentes, equivalentes. Un *número* real, que es también un *punto* de la recta, es un número decimal infinito periódico, o bien no periódico. De forma equivalente, los números reales consisten en las llamadas *sucesiones fundamentales* de números racionales (fracciones). Su estatuto ontológico es en buena parte revelado por las propias palabras de Cantor:

> Se tiene una primera generalización de la noción de magnitud numérica en el caso en que, en virtud de una ley, se obtiene una serie infinita de números racionales a_1, a_2..., a_n..., tal que la diferencia $a_{n+m} - a_n$ se convierte en infinitamente pequeña para *n* creciente cualquiera que sea el entero positivo *m*, o, en otros términos, tal que, asignado un número racional positivo y arbitrario, existe un número entero n_1 por el que el valor absoluto de $a_{n+m} - a_n$ es menor que ε cuando $n \geq n_1$, siendo *m* un número entero positivo elegido arbitrariamente. Expreso esta propiedad de la serie de la siguiente manera: «la serie tiene un límite determinado *b*». Así pues, estas palabras solo sirven para enunciar esta propiedad de la serie, sin, por el momento, aludir a otra cosa; y del mismo modo que relacionamos la serie con un signo concreto *b*, debemos asignar distintos signos *b*, *b'*, *b''* a diferentes series de la misma especie.[97]

Para Cantor, los números reales coinciden con los símbolos que designan sucesiones de fracciones que se aproximan infinitamente al límite y son tales que, para índices superiores a un valor n_1, «del que por ahora no se pide la efectiva calculabilidad», la diferencia en valor absoluto entre las fracciones es inferior a cualquier número racional positivo ε asignado. Se capta en esta explicación el espíritu esencialmente formalista con el que Cantor introduce los números reales que consisten exactamente en esas series. El *signo b* designa la serie y designa también, por lo tanto, un *número* (racional o irracional), aunque solo sea un símbolo introducido para representar la serie de forma concisa.

Así pues, los números reales *son*, por definición, secuencias o sucesiones fundamentales, y su aritmética es una extensión formal de las operaciones ordinarias a esas secuencias. La secuencia de las relaciones entre números diagonales y laterales es fundamental en el sentido de Cantor e identifica el número real que se designa con el símbolo √2. El algoritmo de aproximación de la raíz cuadrada de 2 ideado por los pitagóricos era, por

tanto, una forma de *realización efectiva* del punto inextenso correspondiente a √2.

Ahora bien, Cantor demostró que cualquier colección de intervalos con longitud no nula de la recta real que no se superpongan uno al otro es un conjunto como mucho innumerable; está, por tanto, en correspondencia 1-1 con el conjunto de los números enteros positivos. En cambio, el conjunto de los números reales concebidos como secuencias de intervalos cuya longitud tiende progresivamente a cero es *no* numerable. Cantor lo demostró con su célebre método diagonal.

La teoría de Cantor no se basa en una divisibilidad indefinida de la recta que lleva a alcanzar, *al final*, unos puntos inextensos, sino en la preexistencia actual de una infinidad más que numerable de puntos-números que deben considerarse como sucesiones de intervalos cuya longitud disminuye progresivamente y tiende a cero. Si asociamos formalmente a cada una de estas sucesiones un *símbolo* (como proponía Cantor refiriéndose a las secuencias fundamentales), se puede también considerar el agregado de estos símbolos individuales como un conjunto de puntos atómicos en cuyo ámbito podemos definir intervalos de *longitud* positiva. Se trata en el fondo de una construcción simbólica, de un *modelo* matemático del continuo que, pese a permitir edificar el análisis, no responde plenamente a nuestra intuición. Pero ahora el conjunto de números reales comprendidos entre dos extremos a y b, con $a < b$, es decir, el intervalo $[a, b]$, tiene una longitud definida precisamente por el número real $b - a$, que es distinto de cero. Por lo tanto, si la teoría de Cantor y de Dedekind es coherente, nos pone al resguardo de la paradoja de Zenón, porque permite definir intervalos de longitud *finita y no nula* formados por un conjunto (más que numerable) de puntos inextensos.

De esta forma, se conseguiría también el objetivo de dar al continuo una connotación de actualidad y de efectividad, si se quiere dar crédito a la tesis de Whitehead de que la actualidad tiene un carácter estrictamente atómico. La matemática es, por otra parte, el instrumento esencial para comprender si esta idea de realismo atómico puede desembocar en una teoría aceptable y coherente. Como observaba John Locke (*Ensayo sobre el intelecto humano*,

II, 17, apartado 9), en el número encontramos el concepto más adecuado para comprender la naturaleza del infinito y llegar hasta el fondo de esa confusa acumulación de elementos a la que el infinito nos arrastra y en la que la mente, carente de otros medios adecuados, acaba perdiéndose. También la física estudia los átomos. Pero la física y la matemática persiguen objetivos diferentes en este campo. Mientras que el físico indaga sobre la recíproca relación entre pensamiento y realidad, el matemático trata de aclarar el nexo entre su pensamiento y las fórmulas, y se ve, por tanto, impelido a elaborar modelos adecuados y suficientemente plausibles de nuestras intuiciones, un presupuesto necesario para aplicarlas al mundo real. Pese a sus diferentes direcciones de búsqueda, ambas, la física y la matemática, aspiran, sin embargo, a fundamentar la realidad del mundo.

En cualquier caso, existen varias dificultades a este respecto. Un número real es un elemento de un dominio abstracto cuyos axiomas son cumplidos por una variedad de entidades matemáticas que pueden no ser números. Se puede entonces tratar de definir la *esencia* de las entidades matemáticas solo a menos de isomorfismo, con una falta de preselección categórica casi inevitable.[98] Además, estamos inducidos a pensar en un punto de la recta numérica como en una entidad indivisible. ¿Se puede adaptar a este pensamiento el concepto de número como secuencia fundamental, como sección o bien como secuencia de intervalos? Tanto Dedekind como Cantor se sentían obligados de algún modo a *crear* una nueva entidad que correspondiera a una secuencia o una sección, y que pudiera designarse con un símbolo al que asignar la misma realidad que a cualquier número entero.[99]

Para los números transfinitos, Cantor establecía un estatuto ontológico similar al de los números reales a partir de una definición formal de ambos. No es casual, por tanto, que insistiera en diferentes ocasiones sobre la *realidad* intrínseca de los números de cualquier tipo, porque tales números, aunque abstractos, eran la base de una actualidad de tipo atomista, la única que parecía poderse contraponer, dentro del respeto de los axiomas de un campo numérico completo y ordenado, al infinito meramente potencial de una división repetida del continuo. También por este motivo, y no solo

porque había que definir de forma coherente los números transfinitos, Cantor estaba abierto a ver realizable, en la matemática, el infinito actual.

Cantor acompañaba el anuncio de sus descubrimientos con la declaración de que «los nuevos números así obtenidos tienen siempre, por tanto, la misma precisión concreta y la misma realidad objetiva que los anteriores».[100] Para Cantor, los números enteros ya son entidades *actuales*, en el sentido de que, con arreglo a su definición, tienen una posición perfectamente definida y diferenciada en nuestro pensamiento, hasta determinar y modificar su desarrollo. La *actualidad* de los números significa que «estos deben ser considerados como una expresión o imagen (*abbild*) de procesos y relaciones en el mundo *externo*, independiente del intelecto».[101]

Se remonta a una separata publicada en 1883, *Fundamentos de una teoría general de la multiplicidad*, la primera defensa pública, por parte de Cantor, del infinito actual, en oposición a una larga tradición que se remonta a Aristóteles y que, salvo algunas excepciones —una de las más importantes, la de Bernhard Bolzano en las *Paradojas del infinito*, de 1851—, había asignado al infinito un significado meramente potencial. En los *Fundamentos*, Cantor distinguía entre *reelen Zahlen*, los números reales diferentes de los números complejos (como la raíz cuadrada de −1), en un sentido matemático formal, y los *realen Zahlen*, los números que tienen una existencia real, no puramente formal (aunque introducidos de manera formal). Los números transfinitos, así como los irracionales definidos por secuencias fundamentales, debían, por tanto, poseer un estatuto ontológico completamente análogo: los segundos, con relación sobre todo a los puntos del espacio geométrico; los primeros, en relación con una realidad material consistente en un conjunto de mónadas (de nuevo) de incierta cardinalidad. Según Cantor, los números transfinitos debían de ser considerados como nuevos números irracionales. Su definición matemática, formal, los situaba en un idéntico plano. Los números irracionales y los transfinitos se asemejaban en su naturaleza más intrínseca, ambos eran formas o variantes del infinito actual, y si no se aceptaban unos, se estaba obligado a no aceptar, por coherencia, tampoco los otros.[102] Definiendo los átomos

numéricos de la recta continua como secuencias fundamentales, infinitas, de relaciones entre enteros, Cantor heredaba así el realismo atomista de los pitagóricos. El *arithmós*, el número entero positivo, parecía ahora capaz de fundamentar una matemática de los indivisibles, de los números-puntos del continuo.

Gottlob Frege defendió las tesis de Cantor, equiparando el estatuto ontológico de números de diferente especie en aras de la coherencia lógica:

> Estoy completamente de acuerdo con él [Cantor] en juzgar la opinión de aquellos que, entre todos los posibles números, querrían reconocer como efectivos solo los números naturales finitos [...]. En nuestras investigaciones podemos utilizar, sin ningún temor, cualquier nombre o signo que haya sido introducido con un método lógicamente irrefutable; y por ello el número ∞ 1 resulta igual de justificado que los números 1 y 2.[103]

Efectivos eran, pues, para Frege, todos los números introducidos de forma lógicamente coherente. Esto era un sello de realidad que los números racionales e irracionales proporcionaban ahora al continuo y a todas las teorías del análisis que permitieron establecer que ciertos entes matemáticos, como el punto de intersección de dos líneas, *existen* en el continuo. Una situación que cambiaba por completo toda la teoría del espacio-tiempo sostenida hasta entonces, y refutaba la opinión más extendida entre los filósofos, al menos a partir de Leibniz, de que un espacio compuesto de puntos no es lógicamente posible (Russell, *Principles*, apart. 423). Un momento clave en la evolución de esta teoría había sido la *Crítica de la razón pura* de Kant, en concreto la segunda antinomia sobre la composición de las sustancias. La tesis de dicha antinomia era la afirmación de que «en el mundo, toda sustancia compuesta consta de partes simples, y en ninguna parte existe otra cosa que no sea lo simple, o lo que está compuesto de ello».[104] Russell pudo explicar que, gracias a la reciente teoría aritmética del continuo, la afirmación contraria, antitética, ya no se sostenía. Defendió (*Principles*, apart. 435) que el

argumento esgrimido contra la tesis y contra la existencia de los puntos demostraría que tampoco deberían existir los números, racionales e irracionales, que en la teoría de Cantor y Dedekind estaban asociados a los puntos de la recta. En la *Doctrina de la ciencia* (315, 7), de 1837, Bernhard Bolzano había abordado ya la cuestión, sosteniendo que la demostración de la antítesis kantiana, según la cual ninguna sustancia compuesta consta de partes simples, estaba completamente equivocada. Bolzano concebía el continuo como conjunto de entidades simples indivisibles, como puntos o instantes. En líneas generales, su teoría era inadecuada: a falta de un criterio de *completitud*, persistían las lagunas del cuerpo racional. Sin embargo, Bolzano anticipaba de forma eficaz, también en su célebre tratado *Paradojas del infinito*, publicado póstumamente en 1951, el atomismo numérico que caracterizaría las teorías más rigurosas del continuo aritmético de finales de siglo.

A Henry Bergson no le pasó inadvertida la conformidad a las exigencias de un realismo tanto práctico como filosófico inherente a los componentes puntiformes del espacio y del tiempo. Dijo haberse sentido impresionado al comprobar que el tiempo vivido, tan central para la filosofía, escapaba por completo a la matemática.[105] Los matemáticos situaban el tiempo y el espacio en el mismo plano, como cosas del mismo género, y para pasar del uno al otro bastaba con intercambiar «sucesión» por «yuxtaposición». Nuestra inteligencia, observaba Bergson, se ejercita con más comodidad cuando tiene que tratar con puntos de alguna forma establecidos. Se pregunta en dónde se encuentra una cosa en movimiento en un determinado momento, dónde estará en el momento siguiente y por dónde pasará, y, aunque parece interesarse así por la duración temporal, «siempre quiere tratar con inmovilidades, reales o posibles».[106] Pero con Bergson el sentido y la finalidad del continuo matemático se modifican de forma radical: precisamente por el hecho de ser reales o actuales, con el fin de responder a nuestras necesidades prácticas, el tiempo y el espacio matemáticos traicionan la experiencia vivida y el tiempo interior. Fue después Norbert Wiener, en el curso de su colaboración con Eberhard Hopf, quien se dio cuenta de que el tiempo bergsoniano, no un flujo lineal, sino un

«*emboîtement* de hechos de conciencia unos dentro de otros, en el gradual enriquecimiento del yo»,[107] servía también para explicar la física de las estrellas y el funcionamiento de la bomba atómica. Wiener introdujo, junto a Hopf, un tipo de ecuaciones integrales (llamadas de Wiener-Hopf) que servirían también para simular procesos temporales de la naturaleza más variada, con eficaces técnicas de predicción y de filtraje de señales. También en el trasfondo de las actividades y de las investigaciones de Wiener, con el estudio de artefactos y modelos matemáticos basados en el concepto de retroacción (*feedback*), se traslucía una orientación conforme a la visión de Proust y de Bergson. El tiempo de la cibernética, que se apartaba de algún modo del de los físicos, debía ser también el de los fenómenos teleológicos, el de los procesos de crecimiento y de aprendizaje, pareciéndose así a la duración realmente vivida, al tiempo interior organizado como un proceso de recíproca penetración de estados de conciencia. Su estructura, basada en el fenómeno del *emboîtement*, podía expresarse en los modelos matemáticos de los procesos temporales,[108] en términos de integrales y de matrices de Toeplitz, que expresaban la misma idea del crecimiento de las figuras, a través de sucesivas correcciones gnomónicas, de la matemática antigua.

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ g & a & b & c & d & e \\ h & g & a & b & c & d \\ i & h & g & a & b & c \\ l & i & h & g & a & b \\ m & l & i & h & g & a \end{bmatrix}$$

La estructura de las matrices de Toeplitz (aquí escrita para solo seis líneas y seis columnas) se caracteriza por la igualdad de todos los elementos en las

líneas paralelas a la diagonal principal; por lo tanto, bastan la primera línea y la primera columna para definirla. El fenómeno del *emboîtement* es visible en el hecho de que en el interior de la matriz son recortables matrices más pequeñas con la misma estructura de Toeplitz. Una propiedad de autosemejanza que recuerda análogas construcciones de la geometría griega y que se refleja en este caso en la estructura de la matriz inversa,[109] que se puede autogenerar desde la primera fila y columna.

Las matrices de Toeplitz, consecuencia directa de la discretización de las ecuaciones de Wiener-Hopf, ganarían con los años una gran importancia en el álgebra matricial, al presentarse como un arquetipo de referencia para el estudio del concepto algebraico de *estructura* de una matriz. En dicha estructura se debían buscar las razones de la eficiencia computacional, pero también los motivos de la afinidad entre tiempo vivido y tiempo matemático.

Así pues, el continuo aritmético de los números reales era el fundamento de la propia matemática aplicada, y los números, ordenados en formas correspondientes a precisos modelos de la realidad física o biológica, podían recordar por analogía la realidad del tiempo vivido, del auténtico tiempo interior que Bergson había contrapuesto al tiempo espacializado de los matemáticos. Esto dependía de la existencia, era la convicción de Wiener, de procesos individuales y específicos que pueden adoptar indistintamente un significado físico, químico, fisiológico o matemático.

Sin embargo, no tardó en descubrirse, sobre todo gracias a Brouwer, que las series fundamentales que servían para definir los números reales, en la nueva teoría del continuo aritmético, no responden a un criterio de efectividad computacional. Este fue un paso crucial, junto con la crisis de los fundamentos de la matemática, en el curso del cual la actualidad y la efectividad se convertirían en prerrogativa de otro concepto que los matemáticos del siglo XX se encargarían de precisar, el de *algoritmo*.

[97] G. Cantor, «Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques», en *Acta Mathematica*, II, 1883, p. 337.

[98] B. Artmann, *Der Zahlbegriff*, cit., Abschlussbemerkungen zu Kapitel 2.

[99] *Loc. cit.*

[100] G. Cantor, «Fondements d'une théorie générale des ensembles», en *Acta Mathematica*, II, 1883, p. 390. La cursiva es mía.

[101] P. E. B. Jourdain, *Introduction a G. Cantor, Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, Dover, Nueva York, 1955, p. 67. La cursiva es mía.

[102] J. W. Dauben, *Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1979, pp. 126-128.

[103] G. Frege, «I fondamenti dell'aritmetica», en *Logica e aritmetica*, a cargo de C. Mangione, Boringhieri, Turín, 1965, pp. 324-325 (ed. orig. Die Grundlagen der Arithmetik, Koebner, Breslau, 1884).

[104] I. Kant, «Kritik der reinen Vernunft. Zweite Aufl age 1787», en *Werke. Akademieausgabe*, Reimer, Berlín, vol. III, 1904, p. 301 (trad. it. *Critica della ragione pura*, a cargo de G. Colli, Adelphi, Milán, 1976, p. 492).

[105] H. Bergson, *La Pensée et le Mouvant*, en *Œuvres*, a cargo de A. Robinet, Presses Universitaires de France, París, 1959, p. 1254.

[106] *Ibid*., p. 1257.

[107] H. Bergson, *Essai sur les données immédiates de la conscience*, en *Œuvres*, cit., p. 72.

[108] N. Wiener, *Extrapolation, interpolation, and smoo thing of stationary time series* (1942: primera redacción con circulación limitada; y 1949: redacción más amplia, con inclusión de los artículos de N. Levinson aparecidos en la revista en 1943), The MIT Press, Cambridge (Mass.), 1949. Las matrices de Toeplitz aparecen en un artículo de Levinson, que simplifica y aclara en muchos aspectos el trabajo original de Wiener: «The wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction», en *Journal of Mathematics and Physics*, XXV, 1946; reed. Como Appendix B en N. Wiener, *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series*, cit.

[109] La inversa de una matriz A de n líneas y n columnas es una matriz B tal que el producto de B por A es igual a la matriz identidad I, en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y el resto de los elementos son iguales a 0. Se escribe entonces $B = A^{-1}$. Si A es la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales, el conocimiento de su inversa A^{-1} permite calcular fácilmente la solución del sistema, como un simple producto de A^{-1} por el vector de los términos conocidos. Véase más abajo, nota 165.

12

Realidad de los números
Las secciones de Dedekind

La importancia de la lógica para el desarrollo de la matemática es universalmente conocida. Pero ¿se puede afirmar que la matemática *deriva* de la lógica? Esta cuestión es distinta de la que se refiere a la *reducibilidad* de la matemática a la lógica, a la que trataron de responder positivamente, entre finales del siglo XIX y principios del siglo XX, Richard Dedekind, Gottlob Frege y Bertrand Russell.

Si atendemos a los principios que en la antigüedad fundamentaron ambas disciplinas, matemática y lógica, podemos quedar entrampados en un dilema: ¿el razonamiento en el que se basa el silogismo tiene su propio origen y justificación, o bien nace de la matemática? Investigaciones relativamente recientes han demostrado lo plausible de la segunda hipótesis: una cuidadosa interpretación de la teoría silogística de Aristóteles (*Primeros analíticos*, 25 b 26 y ss.) permite reconocer un tipo de razonamiento y la correspondiente selección terminológica que remiten a la teoría griega de las proporciones.[110]

¿Qué se puede decir entonces de la teoría de las proporciones? ¿Se trata de una teoría matemática o bien de una teoría lógica pensada y presentada en calidad de matemática? La pregunta no es ociosa, ya sea porque la teoría euclidiana de las proporciones podría pasar por una lógica enmascarada (ya lo sostuvo implícitamente Hans Reichenbach en 1928),[111] ya sea porque la definición de proporción, en el libro V de los *Elementos* de Euclides, dio

origen, a finales del siglo XIX, a una extensión de naturaleza aparentemente *lógica* del concepto de número.

Como se desprende del ejemplo de los números laterales y diagonales, un número real puede consistir en una secuencia infinita de intervalos con extremos racionales, cada uno de ellos contenido en el anterior, cuya longitud tiende progresivamente a cero. En virtud de un postulado, se asume que existe un punto que está contenido en todos los intervalos. Además, dada la secuencia de intervalos, se puede encontrar un criterio para dividir el cuerpo de los números racionales en dos clases, de modo que cada número de la primera clase sea menor que cualquier número de la segunda.[112]

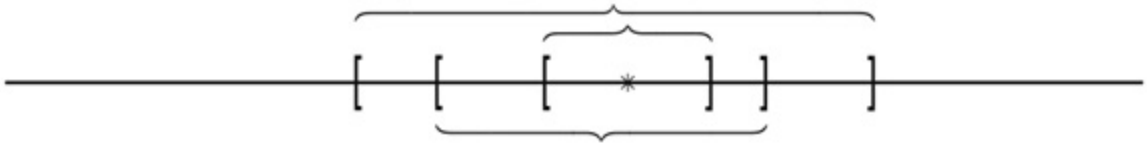


Figura 7

Siguiendo el modelo de este esquema, hacia finales del siglo XIX se elaborarían modelos del continuo aritmético sustancialmente equivalentes al de las secuencias fundamentales de Cantor. Dedekind,[113] en concreto, explicaría de forma exhaustiva que un número irracional x es definido cada vez que se tiene un criterio para asignar cada número racional a una cosa, y solo a una, entre dos clases de números racionales A y B, de manera que cada número de A es menor que cada número de B, y además A no posee un elemento máximo ni B posee un elemento mínimo.[114] En el lenguaje de Dedekind, la pareja (A, B) define una *sección* (*abschnitt*) del cuerpo de los números racionales. Ahora bien, la teoría de las proporciones de Eudoxo-Euclides tiene el mismo significado. Establece que, dadas las cuatro magnitudes a, b, c y d, las relaciones $a : b$ y $c : d$ son iguales si $a : b$ es mayor, igual o menor que la relación $m : n$ (m y n enteros) siempre que $c : d$ sea respectivamente mayor, igual o menor que $m : n$.[115] En tal caso, la relación $a : b$ divide el conjunto de los números racionales en dos clases A y

B, la primera formada por todas las relaciones $m : n$ menores que $a : b$ y la segunda por toda la relaciones $m : n$ mayores que $a : b$. De forma análoga, se pueden definir dos clases *C* y *D* en correspondencia con la relación $c : d$, y se demuestra entonces que $A = C$ y $B = D$. En otras palabras, si la relaciones $a : b$ y $c : d$ son iguales en el sentido euclídeo (*Elementos*, V, def. 5), entonces identifican la misma sección, o sea, las relativas parejas de clases que definen las secciones son coextensivas.

La idea de sección es relativamente abstracta, y se presta a una definición lógica de los números reales como la propuesta por Russell o por Quine; pero hemos visto cómo un típico ejemplo de sección se obtiene del *algoritmo* que calcula la relaciones $d : l$ entre números diagonales y laterales para aproximar $\sqrt{2}$. Ciertamente, este algoritmo era uno de los muchos posibles, ideados en épocas remotas, del que podría provenir la idea de Eudoxo-Euclides y, después de ellos, la de Dedekind. Pero tiene un carácter paradigmático, porque en él están implicados los principales conceptos con los que se ha ideado una definición de los números reales. La propiedad de *completitud* de los números reales, que expresa la ausencia de lagunas, se puede formular afirmando que «toda sección de Dedekind es generada por un número real». La propiedad de completitud se puede definir de muchas maneras equivalentes, y es atribuible a cualquier dominio *K* tal que cada uno de sus elementos genera una sección en *K*, pero es evidente que su razón de ser se basa en la existencia de algoritmos para aproximar los números irracionales. La *completitud* (cada elemento genera una sección) y la *densidad* (dados, en todo caso, dos elementos diferentes *a* y *b*, siendo $a < b$, existe otro elemento mayor que *a* y menor que *b*) son las dos propiedades esenciales para que un conjunto ordenado pueda llamarse continuo. Los números racionales forman un conjunto denso, pero no completo; los números enteros forman un conjunto no denso y completo; los números reales forman un conjunto denso y completo.

Sin embargo, aquí cabe preguntarse: ¿qué necesidad hay de definir $\sqrt{2}$ como una sección del cuerpo racional en vez de como un número (de infinitas cifras decimales) que elevado al cuadrado da como resultado 2? No se excluye la posibilidad de expresar un número irracional como una

secuencia (no periódica) de infinitas cifras, ni la posibilidad de definir un número irracional, en algunos casos particulares, como el número que, elevado a una cierta potencia, da como resultado un número entero dado. Pero detrás del concepto de *sección* se halla ante todo la idea de *relación* entre dos magnitudes ($\sqrt{2}$ y π son, respectivamente, la relación entre la diagonal y el lado de un cuadrado y entre una circunferencia y su diámetro, y Dedekind se remite explícitamente a la teoría de las relaciones de Eudoxo-Euclides), y decir que esta relación corresponde a un número irracional significa que no es expresable como una relación entre números enteros (*Elementos*, X, 7).

Así pues, para comprender qué es un número irracional, es necesario saber qué es una relación, es decir, qué significado adopta la relación entre dos magnitudes, que se expresa con el signo « : ». Para definir el concepto de relación es posible basarse entonces en dos teorías: la de Eudoxo-Euclides, que se remonta al 350 a. C. (*Elementos*, V, def. 5), a la que se remite Dedekind, y aquella a la que alude Aristóteles cuando se refiere a la idea geométrica de similitud (*Tópicos*, 158 b 29 y ss.):

> También en matemática la construcción de figuras geométricas se vuelve a veces difícil por la falta de una definición, como en el caso de la demostración de que una línea paralela a los lados de un paralelogramo divide de forma semejante (*homoíos*) la línea y el área. Pero una vez que la definición está establecida, esa propiedad es inmediatamente evidente: porque las áreas y las líneas tienen la misma *antanaíresis*, y esta es la definición de «misma relación».[116]

Ahora bien, como se ha visto en el caso de la diagonal y del lado de un cuadrado, la *antanaíresis* consiste en un proceso de operaciones elementales de medida que se resuelve cada vez en la sustracción de dos magnitudes. Medir una magnitud x con otra, y, menor, asumida como unidad de medida, significa simplemente, como observaría también Bernhard Riemann en 1854,[117] *superponer* una magnitud a la otra y establecer el número q de veces que la magnitud menor y está en la mayor x (q es el cociente). Si

queda un resto *r* distinto de cero (menor que *y*), se repite la operación de medida en *y* y *r*, es decir, se cuenta el número de veces que *r* se halla contenido en *y*. El proceso se repite indefinidamente en el caso de magnitudes inconmensurables, porque ningún resto es nulo. Esto significa, propiamente, *dividir* la magnitud *x* por la magnitud *y*. Con los cocientes *q* obtenidos a lo largo del proceso se construye, como se precisaría después, la *fracción continua* que *define* el número irracional correspondiente a la relación entre magnitudes inconmensurables *x* e *y*.

El fenómeno crítico que interesa al concepto de sección es ahora el siguiente: con la *antanaíresis* se construyen paso a paso, con los números *q*, que establecen el número de veces que una magnitud está contenida en otra, fracciones numéricas *m* : *n* cuyo valor es mayor o menor, de forma alterna, que la relación *x : y*.[118] Dicho de otro modo, la *antanaíresis* sirve para definir dos sucesiones *A* y *B* de fracciones numéricas, respectivamente creciente y decreciente, tales que cada fracción de *A* es menor que la relación entre *x* e *y*, mientras que cada fracción de *B* es mayor que dicha relación. Las fracciones en *A* son aproximaciones por defecto; las fracciones en *B* lo son por exceso de la misma relación *x* : *y*.[119] Se podría descifrar, por tanto, la definición euclídea de igualdad de relaciones dando a las relaciones numéricas *m* : *n* que intervienen en la definición el mismo significado que tienen las relaciones numéricas construidas con la *antanaíresis*. La igualdad de las relaciones entre magnitudes se decide tomando como base la relación de orden (>, <, o bien =) que tales relaciones tienen con las relaciones entre números; pero si queremos asignar a estas relaciones una existencia real, hay que imaginárselas como resultado de un proceso de cálculo por medio de la *antanaíresis* o de otro procedimiento con un grado suficiente de eficiencia.

Cuando Simone Weil sugiere, en una carta a su hermano André, que el descubrimiento de la inconmensurabilidad no fue solamente un drama, sino también un motivo de felicidad, hay que pensar en la capacidad de cálculo de las relaciones numéricas: es posible «ver que también lo que no se *define* a través de los números no deja de ser siempre una relación»[120] gracias al hecho de que la ausencia de una definición a través de los números está en

cualquier caso fundamentada por procedimientos que calculan aproximaciones numéricas por exceso y por defecto.

El abismo de infinidad del continuo no es agotado ciertamente por los procedimientos que aproximan las magnitudes con relaciones numéricas, y no lo es, por tanto, por el conjunto de los números computables, que, como demostró Turing en 1936, es solo numerable;[121] pero el conjunto de esos procedimientos permite un acercamiento al abismo del *apéiron* que no comporte una pérdida irreparable del límite y de la unidad. Como decía Plotino (*Enéadas*, VI, 6, 3), «si te acercas al infinito sin echar sobre él una suerte de red, alguna delimitación, se te escapará de las manos y no encontrarás nada unitario en él, porque en este caso ya lo habrás definido». Desde la tradición órfica y pitagórica, desde los atomistas y desde Platón al menos hasta Nicómaco, los números enteros y sus relaciones eran ya elementos constitutivos, los verdaderos nudos de esta red.

Cuando Russell y Whitehead, en los *Principia Mathematica* (1910-1913), trataron de definir la matemática por medio de la lógica, y en particular un número irracional por medio de las clases, pensaron sobre todo en el concepto de sección de Dedekind. Lo mismo hizo más tarde Quine,[122] tomando como modelo la definición elaborada en los *Principia*. Una señal indudable de que la teoría de Dedekind y la de Euclides se prestaban especialmente bien a fundamentar una teoría de los números reales en términos puramente lógicos. Russell lo explicaba extensamente en los *Principles of Mathematics* (párr. 259 y 261). La visión de Russell tiene como presupuesto una teoría de los cuantificadores universales y existenciales, basada en el uso de términos como *todos los a*, *algunos a*, *existe un a*, que relacionan el conocimiento de los números reales con una lógica de funciones proposicionales y, en definitiva, con un sistema de asociaciones deducibles formalmente por un conjunto de axiomas. Sin embargo, la lógica de los cuantificadores es respaldada por la idea *matemática* de sección y por los esquemas algorítmicos que la han precedido y justificado (apart. 60).[123]

¿Hasta qué punto el concepto de sección responde a nuestra idea intuitiva de número? La teoría de Dedekind es en cierto modo ilógica, porque no

parece natural concebir un número como un conjunto caracterizado por una estructura relativamente compleja como la sección. Por este motivo, en el caso de que la sección no identificase un número racional, Dedekind consideraba oportuno *crear* una nueva entidad, un número irracional α, donde α era un símbolo destinado a designar la pareja de clases A y B. Por lo tanto, las creaciones de Dedekind eran afines a las de Cantor. Esto era lo que observaba en una carta de 1888 dirigida a Heinrich Weber:

> Es exactamente la misma cuestión, a propósito de la cual dices que el número irracional no debería ser otra cosa que la sección misma, mientras que yo prefiero que sea creado como algo *nuevo* (diferente de la sección) que corresponde a la sección y que *produce* la sección. Tenemos el derecho de atribuirnos esta capacidad de crear y es mucho más apropiado proceder así para poder estudiar todos los números del mismo modo. También los números racionales *producen* secciones, pero ciertamente no pienso identificar los números racionales con las secciones que estos *producen*.[124]

Aquí debe hacerse hincapié en el término *producir* (*hervorbringen*), una capacidad atribuida a propiedades intrínsecas de los números. Los números *generan* las secciones gracias a una especie de potencia, a una *dýnamis* que recuerda las tesis del *Sofista* de Platón (247 d) y que los califica por ello como entidades actuales y eficaces. La realidad de los números nace de aquí, de esta capacidad suya de imponer nuevas líneas de pensamiento que anticipan a su vez nuevos conceptos. La libertad de crear los conceptos parece adecuarse a una estricta necesidad, y hay realidad cada vez que se toca una necesidad.

La teoría de Dedekind respondía al criterio de *completitud*: parecía apelar a nuestro concepto intuitivo de continuo, aunque no respondiera a un criterio de gradualidad. Junto a la *densidad*, como se ha dicho, la completitud caracteriza el continuo numérico de los reales y es sinónimo técnico de ausencia de lagunas: con la exclusión del dominio de los números de las secciones que representan los números irracionales se

introducirían lagunas cuya presencia no podemos admitir en un conjunto continuo.[125]

También para Cantor, el signo que denota la secuencia fundamental se había introducido a través de un acto de creación, no arbitraria, sino dictada por la *necesidad*[126] de una extensión del cuerpo de los racionales. La noción de número de elementos de un conjunto tiene una representación objetiva inmediata, explicaba Cantor, y «la relación entre el número de elementos de un conjunto y el número en sí demuestra la *realidad* de este último incluso cuando es infinito».[127] Con su teoría del continuo, Cantor y Dedekind invalidaban la tesis kantiana de la prioridad de la intuición de espacio y de tiempo para la matemática: el concepto de continuo era más primitivo tanto para el tiempo como para el espacio, y estaba basado esencialmente en la idea de número y clase.[128]

Una circunstancia posterior avaló la *realidad* de los nuevos números. Salvo una debida puntualización sobre la llamada propiedad arquimediana de un campo numérico,[129] la teoría del continuo de Dedekind es equivalente a la de Cantor. Afirmar que un campo numérico *K* es arquimediano y que cada secuencia fundamental tiene un límite en *K* equivale a afirmar que en *K* toda sección de Dedekind es generada por un elemento *s* de *K*.[130]

En las últimas décadas del siglo XIX, todo parece converger en la afirmación de que los números son entes reales. En la correspondencia que tuvo con Cantor, Charles Hermite confesaba que los números enteros le parecían formar un mundo de realidades que existe fuera de nosotros con el mismo carácter de necesidad de las realidades naturales que se ofrecen a nuestros sentidos. Para Cantor la realidad de los números, enteros, racionales, irracionales y transfinitos estaba basada, además de en una evidencia concreta, en la propia verdad de las Escrituras. Estas parecían atestiguar un conocimiento divino de los números infinitos: Agustín lo explicaba en la *Ciudad de Dios*, XII, 19, que para Cantor se convirtió en un respaldo a favor de su teoría matemática del infinito actual. La identidad entre número y sabiduría, proclamada por Agustín, se podía leer a través de lítotes en el *Salmo* 146, 4-5 (versión de los setenta), que canta a Aquel que «calcula el número de estrellas / y a todas da un nombre», y que a la vez es

el Señor «cuya inteligencia es sin número (*tês sunéseos autoû ouk ésti arithmós*)». Para el Señor del universo, observaba Agustín, la infinitud del número no es incomprensible, «aunque no exista un número para el número infinito» (*Ciudad de Dios*, XII, 18).

La misma idea de sección circulaba también a finales del siglo XIX entre los matemáticos italianos. Y Ulisse Dini, en concreto, la utilizó como fundamento de su teoría de las funciones reales. Se impuso la tarea de elaborar una teoría *aritmética* del continuo, exactamente como Cantor y Dedekind, independiente de la geometría y de cualquier presupuesto basado en las intuiciones del espacio y del tiempo. Su teoría es completamente análoga a la de las secciones y, de hecho, Dini y Dedekind se citan mutuamente. También para Dini las dos clases que identifican un número irracional, una en orden creciente y la otra en orden decreciente, están constituidas por números que

> se acercan indefinidamente entre sí y a una magnitud única y determinada cuya *existencia* es conocida *a priori*, pero que no puede ser nunca alcanzada atendiendo solo a la consideración de las magnitudes correspondientes a los números racionales de las dos clases y que señala el límite entre las magnitudes de dichas clases; por tanto, si también a esta magnitud se le asigna un número correspondiente, este número no será racional, pero le corresponderá [...] efectivamente algo real, ya que le corresponde una magnitud que tiene una verdadera y propia existencia y que, aunque nunca pueda alcanzarse pasando solo por las magnitudes correspondientes a los números racionales, es tal que es posible acercarse a ella cuanto se quiera.[131]

Dini alude repetidamente a la existencia real de los números para señalar que no son meras ficciones, y que los *símbolos* que los designan, con el único objetivo de respetar una «simplicidad expresiva»,[132] corresponden a un fenómeno efectivo y tangible, aunque, se podría añadir, de origen desconocido.

Acontece, no obstante, un hecho singular. Estaban tan seguros de la coherencia y de la existencia real de los números que les pareció plausible extraer de ellos los principios generales de una lógica matemática de los conjuntos finitos e infinitos. Hacia finales del siglo XIX, la teoría de los números de Dedekind tenía precisamente el fin de señalar una teoría lógica de los conjuntos como presupuesto de la noción intuitiva de número y de la estructura recursiva de las operaciones aritméticas. Pero esta lógica osó después aventurarse, a su vez, más allá de los límites permitidos. Chocó contra el muro de las paradojas y los matemáticos empezaron entonces a desconfiar de la existencia de las clases. El realismo desembocó en una suerte de nominalismo escéptico que se confiaba a la coherencia de un lenguaje lógico tomado de propiedades esencialmente matemáticas, conocidas desde hacía siglos y perfeccionadas en las teorías modernas del continuo.

Se trata de hacer derivar todo de principios lógicos, pero no es verosímil que la realidad de los números dependa de una lógica cuantificacional que utiliza expresiones del tipo «existe x tal que $f(x) = 0$», o bien «todo x cumple una cierta propiedad P», con las que Russel abordaba las secciones de Dedekind. Al contrario, la reducción de propiedades matemáticas a la lógica de las funciones proposicionales ha impuesto una visión nominalista que ha quitado realidad a los números, trasladando todo su carácter evidente a la corrección de fórmulas lingüísticas y a la propiedad de coherencia de un sistema formal.

Russell elaboró una *teoría de las descripciones* con el fin de hacer desaparecer literalmente los sujetos gramaticales, reduciéndolos a «símbolos incompletos», símbolos que no representan directamente nada. Se conseguía así exorcizar el problema de la existencia del «hipogrifo» o del «círculo cuadrado», que de otro modo corrían el peligro de ser asumidos como objetos plausibles en el lenguaje común. Las clases y los números definidos por las clases no escapaban a esta suerte de aniquilamiento. Los símbolos que designan clases, así como los que intervienen en las descripciones, son símbolos incompletos. Es importante que se utilicen correctamente, pero en sí mismos no significan nada: «Por eso las clases

son, por cómo las introducimos, meras conveniencias lingüísticas o simbólicas, no auténticos objetos [...]».[133] En un tratado de teoría lógica de conjuntos, Quine declara que su labor consiste sobre todo en decidir cuáles son las proposiciones que identifican una clase, es decir, en los términos de un realismo filosófico, «qué clases existen».[134] Pero todo realismo parece finalmente aventurado. En realidad, para Quine, las clases no existen en absoluto, el formalismo lógico debe ponerse siempre el objetivo de eliminar todo uso explícito que las contemple como entes reales. Cualquier conocimiento real acaba basándose, por tanto, en la mera observación empírica.

¿Qué fue lo que provocó esta desconfianza en la existencia de los números? Ciertamente, la crisis de los fundamentos de la matemática, madurada a principios del siglo XX, a raíz del descubrimiento de las paradojas, agudizó las sospechas, ya expresadas por Leopold Kronecker, de la existencia de números infinitos. Cantor había abusado del poder de abstracción del matemático: esta era también la opinión de Frege, para quien existía el riesgo de que la abstracción fuera utilizada del mismo modo que un poder mágico, y que los números transfinitos fueran entidades evocadas con inadmisibles juegos de prestidigitación.[135] El descubrimiento de las antinomias corroboró el juicio de los matemáticos que atribuían a Cantor una infundada pretensión de omnipotencia.

Impresiona, sin embargo, el brusco paso de las aserciones de matemáticos como Dedekind, Cantor o Dini, orientadas a establecer la realidad de ciertas clases de números, a la deriva nominalista provocada por el logicismo. Se diría que este último se encargó de volver inofensiva la embarazosa pregunta que comenzaba a cernerse en el cambio de siglo, y de la que Nietzsche había encontrado la formulación más radical: «[...] la cuestión permanece abierta: ¿los axiomas lógicos son adecuados a lo real o son criterios y medios para *crear* lo real, el concepto de «realidad» para nosotros? [...]. Para poder afirmar lo primero, sería necesario, sin embargo, como se ha dicho, conocer ya el ser: lo que absolutamente no es. El principio no contiene, por tanto, un *criterio de verdad*, sino un *imperativo* sobre lo que DEBE *valer* como verdad».[136] Por otra parte, de conformidad

con una larga tradición que se remonta a Tomás de Aquino, Descartes y William James, también Whitehead y Russell, en la Introducción a los *Principia Mathematica*, observaban que las definiciones tienen un carácter de *volición*, impuesto por la elección de lo que parece más digno de ser conocido. Y, sin embargo, detrás de esta volición había un imperativo todavía más fuerte que el que entendía Nietzsche: la evidencia de esos fenómenos inalterables e inmodificables, connaturales a los propios números y a las propias fórmulas matemáticas, que imponen las elecciones teóricas más fundamentadas y más significativas.

[110] Véase R. Smith, «The Mathematical Origins of Aristotle's Syllogistic», en *Archive for History of Exact Sciences*, XIX, 1978.

[111] H. Reichenbach, *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*, de Gruyter, Berlín-Leipzig, 1928, apart. 9. Reichenbach sostiene que el valor normativo de la matemática euclidiana se encuentra mucho más en la lógica de la demostración que en la construcción visualizable de las figuras. Podemos pensar por analogía en la tesis ampliamente discutida de que la matemática de los *Elementos* de Euclides es un álgebra geométrica.

[112] Véase, por ejemplo, R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*, Einaudi, Turín, 1950, p. 126 (ed. orig. *What is mathematics*?, Oxford University Press, Londres, 1941).

[113] Dedekind concibió en primer lugar una teoría de los números reales, señalando como decisiva la propiedad de *completitud*, en 1858. Su tratado fundamental *Continuidad y números racionales*, de 1872, resume sus ideas esenciales.

[114] Véase T. L. Heath, *Commentary a The thirteen books of euclid's «elements»*, cit., vol. II, p. 125.

[115] Decir que la relación $a : b$ entre dos magnitudes a y b es menor que la relación $m : n$ entre dos *números* enteros m y n significa que $na < mb$. De forma análoga, para las relaciones de igual y mayor.

[116] Para un discurso general sobre la *antanaíresis* en la matemática preeuclideana, véase sobre todo D. H. Fowler, *The mathematics of Platon's Academy*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

[117] B. Riemann, *Sulle ipotesi che stanno alla base de la geometria*, Bollati Boringhieri, Turín, 1994, p. 5 (ed. orig. *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Dieterichsche Buchhandlung, Göttingen, 1867).

[118] Véase la nota 115, para comprender cómo se establece una relación de orden (menor o mayor) entre una relación entre *magnitudes* y una relación entre *números*.

[119] Véase G. H. Hardy, E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers* (1938), quinta ed., Oxford University Press, Oxford, 1979, pp. 138-139.

[120] S. Weil, *Œuvres complètes*, cit., vol. VII, tomo I, 2012, p. 465. La cursiva es mía. Sobre este tema, véase R. Calasso, *Il cacciatore celeste*, Adelphi, Milán, 2016, p. 272.

[121] A. M. Turing, «On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem», en *Proceedings of the London Mathematical Society*, serie segunda, XLII, 1937; *A Correction, ibid*., serie segunda, XLIII, 1938

[122] W. V. Quine, *Set theory and its logic*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1963.

[123] Véase también S. C. Kleene, *Mathematical Logic*, Wiley, Nueva York, 1967, cap. II.

[124] K. Scheel, *Der Briefwechsel Richard Dedekind-Heinrich Weber*, a cargo de T. Sonar con la colaboración de K. Reich, de Gruyter, Berlín, 2014, p. 277, el entrecomillado es mío; B. Artmann, *Der Zahlbegriff*, cit., p. 65.

[125] Existiendo un isomorfismo entre el conjunto de los números algebraicos (raíces de una ecuación algebraica, es decir, de un polinomio igualado a cero) y el sistema de los números decimales de la forma $a \times 10^{-k}$, siendo a un número entero y k un número natural variable, también el conjunto de los números algebraicos tiene lagunas (*ibid*, p. 42).

[126] G. Cantor, *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, cit., p. 393.

[127] G. Cantor, *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, cit., p. 393.

[128] *Ibid*., p. 403.

[129] La propiedad arquimediana, ya identificada por los matemáticos griegos, es válida cuando, dados x e y, siendo x menor que y, existe un múltiplo de x que supera a y. Se demuestra que un campo numérico ordenado y completo cumple esta propiedad.

[130] B. Artmann, *Der Zahlbegriff* , cit., p. 33

[131] U. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Nistri, Pisa, 1878, p. 4.

[132] *Ibid*., p. 6.

[133] A. N. Whitehead, B. Russell, *Principia mathematica to *56* (1962), Cambridge University Press, Cambridge, 1973, pp. 71-72.

[134] W. V. Quine, *Set Theory and its Logic*, cit., p. 3.

[135] J. W. Dauben, *Georg Cantor*, cit., pp. 221-222.

[136] Nietzsche, «Frammenti postumi, 1887-1888», en *Opere*, cit., vol. VIII, tomo II, 1974, p. 47.

13

¿La matemática es descubrimiento o invención?

La pregunta, repetida hasta el exceso, sobre si la matemática es descubrimiento o invención debería suscitar una respuesta crítica, una distinción concluyente entre lo que es real y lo que es subjetivo y arbitrario. Sobre la posibilidad de esta distinción, la matemática y la lógica se prestan fatalmente a ser interpeladas. Al establecer los axiomas, al demostrar un teorema o al construir la solución de una ecuación, el pensamiento parece conformarse a lo real, y el arbitrio a la necesidad: un intercambio en el que se trata de distinguir, a causa de su carácter inmediato y originario, dos términos antitéticos en el preciso instante en que empiezan a combinarse. Pero su combinación inicial es ya una maraña inextricable, y la pregunta de cuál es verdaderamente el *prius*, el arbitrio o la necesidad, continúa sin respuesta.

La necesidad de introducir los números reales parece estar en contradicción con la tesis, defendida por Dedekind, de que se trata de «libres creaciones de la mente humana»;[137] pero esta libertad debe también ajustarse a una normativa que cumpla lo que el propio Dedekind llamaba «las leyes del pensamiento», la capacidad congénita de nuestra mente para conectar cosa y cosa, de hacer corresponder una cosa con otra, de representar una cosa con otra; una habilidad sin la cual sería imposible pensar. Nada más nacer, nos ejercitamos continuamente en estas operaciones de conexión y de representación, pero *sin un fin predeterminado*. Las cadenas de razonamientos parecen disponerse así,

naturalmente, para sugerir nociones aparentemente sencillas, en verdades complejas, como la noción abstracta de número, que se articula en sucesivas generalizaciones hasta llegar a los números reales y complejos. Todo teorema de álgebra y de análisis, observaba Dedekind, por avanzado que sea, puede ser expresado como un teorema sobre los números enteros, pero esta circunstancia no debe impedir la creación de nuevas entidades:

> No veo ningún mérito —Dirichlet también lo pensaba— en llevar a cabo esta fatigosa circunlocución y en utilizar y reconocer con insistencia solo los números racionales. Al contrario, el mayor y más ventajoso progreso en la matemática y en las otras ciencias ha consistido invariablemente en la creación y la introducción de nuevos conceptos, transformados en «necesarios» por la recurrencia frecuente de complejos fenómenos que solo pueden ser controlados con dificultad por las viejas nociones.[138]

Poincaré utilizaba argumentaciones no muy diferentes para justificar una definición aritmética del continuo. Así pues, la razón que nos lleva a nuevas creaciones no depende de un arbitrio, sino de la frecuencia con que se repiten objetivamente fenómenos complejos que conviene señalar mediante nuevos conceptos. Pero la realidad inherente de lo que se deja designar por estos conceptos se revela sobre todo en la *capacidad de producirlos*. Volvemos así a la sentencia del *sofista* platónico (247 d-e), según la cual «los entes no son más que potencia de producir», y a la matemática de los *Sulvasutra*, los tratados védicos, que uno de los principales problemas que se planteaban era la producción de secuencias de figuras en escalas crecientes. Esta idea se repite en varias ocasiones en la obra de Dedekind: el número produce la sección en términos aritméticos, del mismo modo que el punto correspondiente la produce en la recta geométrica.[139]

Esa misma tesis de la existencia del número que genera la sección del cuerpo de los racionales la encontramos en la matemática de Karl Weierstrass. En los apuntes de las lecciones de Weierstrass reunidos por Salvatore Pincherle, se explica, entre otras cosas, de qué forma se puede

establecer una conexión entre números y puntos de una recta geométrica. Establecido el origen O, para asociar a un segmento OB de la recta un número, se mide OB en función de una unidad preestablecida OA mediante un procedimiento análogo a la *antanaíresis* o algoritmo euclidiano, que permite calcular un número *a* tal que OB = *a*OA, y *a*, el número asociado a OB, podrá ser racional o irracional. Inversamente, para asociar a todo número finito y determinado *a* un segmento de recta OB medido por *a*, será necesario concebir B como punto de separación entre dos clases de puntos, correspondientes a números menores y mayores, respectivamente, de *a*; idea análoga a la de Dedekind, aunque no explícitamente orientada a definir un número real como sección. Al precisar el concepto de igualdad entre dos números (racionales o irracionales), Weierstrass retomó un razonamiento similar al utilizado para definir la igualdad de las relaciones en la teoría de Eudoxo- Euclides (*Elementos*, V, def. 5), que Dedekind utilizaría a su vez para definir el concepto de continuidad numérica.[140]

Decisiva para definir el continuo aritmético fue la idea de designar los números que producen secciones con símbolos. Con la ayuda de los símbolos, observaba Whitehead, somos capaces de realizar transacciones casi mecánicas en el curso de un razonamiento, que de lo contrario requerirían los más complejos procedimientos neuronales. Tampoco debemos cultivar la costumbre de pensar cada vez en lo que estamos haciendo. En todo caso es verdad lo opuesto, porque los progresos provienen a menudo de «extender el número de importantes operaciones que podemos llevar a cabo sin pensar».[141]

En su célebre ensayo de 1940 *Apología de un matemático*, Godfrey H. Hardy abordaba el tema de la realidad de la matemática sin demasiadas vacilaciones y de una forma que él mismo definía como dogmática, con el fin de evitar cualquier malentendido. Decía que creía, de acuerdo con la mayor parte de los matemáticos, en una «realidad matemática» diferente de la realidad física, pero observaba que en su naturaleza no hay acuerdo: unos sostienen que es mental y que somos nosotros quienes la construimos, otros están seguros de que se trata de un mundo exterior independiente de nosotros. Una definición aceptable de la realidad matemática, observaba,

ayudaría a resolver los problemas de la metafísica, y, si se incluyera una explicación de la realidad física, se resolverían todos los problemas. Hardy expresaba sus convicciones de forma lapidaria:

> Creo que la realidad matemática está fuera de nosotros, que nuestra labor es descubrirla u «observarla», y que los teoremas que nosotros demostramos, calificándolos pomposamente de nuestras «creaciones», son simplemente anotaciones de nuestras observaciones. Esta opinión ha sido defendida, de una forma o de otra, por muchos grandes filósofos, de Platón en adelante, y utilizaré el lenguaje que es natural para un hombre que la comparte.[142]

Un gran número de pruebas y testimonios aseguran que las entidades creadas por el matemático, apenas se apoyan en evidencias, abren un territorio desconocido, donde cada *descubrimiento* está lejos de poder ser considerado, al igual que dichos entes, el producto de un libre arbitrio. Pero parece absolutamente claro que ni siquiera el primer acto de creación está libre de una intrínseca necesidad que obliga a considerarlo como un descubrimiento más que como una invención. Las definiciones de los números reales propuestas a finales del siglo XIX forman parte de una única cadena de ideas cuyas razones hunden sus raíces en un conjunto de propiedades de los números y de sus relaciones ya observadas en tiempos remotos, puntualmente orientadas a imponer para los números precisamente esas definiciones y no otras. Entre esas propiedades está comprendido el tema del crecimiento, y el estudio del agrandamiento de las figuras que preocupaba a los matemáticos antiguos deja entrever lo que se convertirá en un tema central de la computación moderna: el crecimiento de los números como fenómeno crítico para la estabilidad del cálculo digital.

[137] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888), cit., 1939, p. III.

[138] *Ibid*., p. VI. El entrecomillado es mío.

[139] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig, 1872, pp. 18, 20-22.

[140] S. Pincherle, «Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. C. Weierstrass», en *Giornale di Matematiche*, XVIII, 1880, pp. 186, 190, 191.

[141] Citado en F. Cajori, *A History of Mathematical Notations (1928-1929)*, Dover, Nueva York, 1993, vol. II, p. 333. Surge hacer una comparación con la exhortación de Benedetto Croce a los filósofos: «¡Pensad, y no calculéis! *Qui incipit numerare, incipit errare!*» (B. Croce, «Filosofia della pratica. Economia ed ética», en *Filosofia dello spirito*, Laterza, Bari, vol. III, 1909, 2da ed. revisada por el autor, 1915, p. 270.) Hay implícita una observación análoga a la de Whitehead, pero en negativo.

[142] G. H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milán, 2002, p. 89 (ed. orig. *A mathematician's apology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1940).

14

Del continuo al digital

Dedekind explicaba que si el espacio tiene una existencia real, no hay razón para que sea continuo, ya que muchas de sus propiedades seguirían siendo las mismas aunque fuera discontinuo.[143] La realidad matemática del espacio era, pues, independiente de la existencia de los números irracionales: su creación como secciones del cuerpo racional se insertaba en una realidad ya formada y reconocida, que se fundamentaba, evidentemente, en números enteros y en sus relaciones, el verdadero antídoto al no ser del infinito, a la ausencia de estructura inherente al *ápeiron*.

En las palabras de Dedekind se capta una especie de justificación *ante litteram* de las tesis de los matemáticos constructivistas más intransigentes, como Leopold Kronecker o Henri Lebesgue, para quienes el análisis podría prescindir de los conjuntos numéricos, como el campo de los reales, de potencia superior a lo numerable. Se trataba de un presupuesto para poder pensar lo continuo no tanto como un complemento de lo discreto, sino como una extrapolación suya, esencialmente irreal, impuesta por un proyecto de simulación de lo que nos parece intuitivamente, en nuestra experiencia ordinaria, como un espacio y una materia llenos, sin saltos y sin lagunas. ¿No estaba afectado ese proyecto por una irrefrenable exigencia de *gradualidad* por nuestra parte, es decir, por la idea de un continuo concebido como «libre devenir»[144] más que como un ensamblaje de entidades completas?

Al igual que Dedekind, Kronecker concebía el número racional como producto de una división del cuerpo racional en dos clases, es decir, como una sección, pero un número como √2 solo era un signo apto para designar esta división. Henri Poincaré (*La ciencia y la hipótesis*) se preguntaba si para que una teoría matemática del continuo nos satisficiera suficientemente deberíamos «olvidar» el origen de estos signos. Pero ¿podía realmente el saber matemático basarse en tal eliminación?

Estamos acostumbrados a considerar lo discreto como una aproximación de lo continuo, en el sentido de que los números irracionales se aproximan con secuencias de números racionales. Pero ¿por qué no invertir el papel de los términos? ¿Por qué no considerar lo continuo, por el contrario, como próximo a lo discreto? Lo que realmente conocemos son los números enteros y sus relaciones, lo que llamamos números racionales; nuestro conocimiento de la realidad se basa en esos números, todos los cálculos son racionales, y quizá no haya necesidad de extender nuestro conocimiento a números que, aunque rellenen las lagunas del cuerpo racional, podrían no ser esenciales en las operaciones efectuadas por un ordenador o por un ser humano. En las páginas del último Nietzsche, encontramos una crítica radical al atomismo implícito en la teoría del continuo aritmético, si bien trasladada al nivel físico:

> Los físicos creen a su manera en un «mundo verdadero»: un sistema atómico fijo, igual para todos los seres, con movimientos necesarios —por lo que, para ellos, «el mundo aparente» se reduce a la faceta, accesible a todo ser a su manera, del ser universal y universalmente necesario [...]. Pero en eso se engañan: el átomo que postulan está tomado de la lógica del perspectivismo de la conciencia y es, por tanto, una ficción subjetiva. La imagen del mundo que esbozan no es en absoluto diferente de la imagen subjetiva del mundo: solo está construida con sentidos más desarrollados, pero siempre con *nuestros* sentidos [...] y al final, sin saberlo, han descuidado algo en la constelación: precisamente el necesario perspectivismo en virtud del cual cada centro de fuerza —y no solo el hombre— construye el resto

> del mundo a partir de sí mismo, es decir, lo mide, lo modela, lo forma según su fuerza [...]. Han olvidado calcular en el «ser verdadero» esta fuerza que *establece* perspectivas [...].[145]

La petición de principio, lanzada por Nietzsche, era una señal de los tiempos y captaba un típico aspecto de la modernidad. No socavaba, ciertamente, el propósito de elaborar un modelo matemático de lo continuo intuitivo, de esa especie de ensamblaje pulviscular que Poincaré percibía con razón en las teorías de Cantor o de Dedekind. Pero al menos contribuía a desautorizar esas teorías, reduciendo la pretensión de establecer que existe «en realidad» algo que se puede llamar sección, número racional, átomo o punto. Lo que Cantor, Dedekind y Poincaré consideraban casi una constricción, la necesidad perentoria de añadir a la sensibilidad —y a sus amplificadores facilitados por instrumentos de medida cada vez más perfeccionados— el conocimiento directo de un «mundo verdadero» que, aunque invisible, podía ahora transformarse en una especie de escisión o de doble sentir, en una tensión problemática entre una pretensión más radical de efectividad y una abstracción que rozaba la ficción subjetiva.

Hilbert pensaba que las abstracciones matemáticas y las ficciones con las que pensamos el infinito (entre ellas, el mismo continuo aritmético) deben tener un fundamento en la realidad por medio de una «armonía preestablecida».[146] Pero llegó una crítica más estricta de la propia matemática: las paradojas de la teoría de conjuntos, empezando por la célebre antinomia que Russell comunicó a Frege en 1902, hicieron que se cuestionara la existencia indiscriminada de las clases y activaron entre los matemáticos la búsqueda de nuevos fundamentos y de nuevas bases de certeza.

Algunas aclaraciones provinieron de la relativa facilidad con la que se podían desenmascarar las causas de ciertas paradojas. La célebre paradoja de Richard, en concreto, era la consecuencia de un acto de pensamiento en apariencia legítimo: agrupar en una única clase todos los números que se pueden describir, en una lengua, con un número finito de palabras (finitas). Pero una clase similar prácticamente no existe, es irreal, comentaría Émile

Borel en 1908; porque no basta con asignar a un conjunto de palabras el atributo «finito» para asegurar la efectiva existencia del ente que esas palabras quieren describir. *Finito* debía ser entonces, propiamente, un *proceso* de cálculo que a partir de un conjunto de datos fuera capaz de elaborar un resultado en un número limitado de pasos. Borel observaba que la existencia de un ente matemático solo puede garantizarse por su construcción efectiva. Las raíces reales de una ecuación algebraica, por ejemplo, pueden ser calculadas con un procedimiento capaz de valorar las cifras decimales hasta la precisión exigida. Lo que garantizaba su existencia era, por tanto, un *algoritmo*.[147] No es casual que Borel fuera considerado el iniciador de un estudio sistemático de los algoritmos, en los albores de un siglo que edificaría una ciencia del cálculo basada precisamente en el concepto de algoritmo y en el uso sistemático de procedimientos numéricos informáticos.[148] En ese mismo año de 1908, Zermelo publicaba un estudio sobre el buen ordenamiento de los conjuntos, que debía asegurar una constructibilidad al resguardo de paradojas. John von Neumann elaboró poco tiempo después una teoría equivalente.[149]

En los primeros años del siglo, las teorías del continuo fueron criticadas por el intuicionismo matemático, con razones que no dependían directamente, por el momento, de la urgencia de resolver las paradojas. El criterio fundamental del intuicionismo era admitir como existentes y reales solo entidades que fueran efectivamente construibles. La aritmética de los números racionales estaba, por tanto, al resguardo de la crítica intuicionista, porque las teorías de Peano y de Dedekind habían justificado suficientemente la existencia de los números enteros naturales, garantizada por una efectiva construcción de ellos mediante sucesivas adiciones de la unidad. Además, Dedekind, con el teorema de recursión, o de definición por inducción, había demostrado que se puede atribuir una existencia coherente y efectiva a las operaciones ordinarias de la aritmética, y que el concepto de calculabilidad se basa en el de enumeración, es decir, en la serie de los números naturales. La *existencia* de una operación como la suma se resumía en la idea de que se pueden adicionar efectivamente, con una serie infinita de pasos, dos números naturales cualesquiera, por ejemplo 3 + 5 = 8 o bien

346 + 512 = 858, en general $n + m$ para cada par de enteros naturales n y m. Era fundamental la idea de *cierre*, en la que se podía leer una especie de control del *crecimiento* de los números y de las magnitudes, ya planteado por la matemática antigua. En el paso de un número al siguiente con el añadido de una unidad, o bien en la adición o multiplicación de dos números naturales, no importa de qué tamaño, se permanecía siempre en el ámbito de un mismo dominio, el de los números naturales, que por este motivo era llamado *cerrado*. Hay que señalar en todo caso un paso clave: pese a admitir que la propiedad de cierre servía para eliminar el peligro del crecimiento de los números, Dedekind ignoraba aún el problema de la inestabilidad de cálculo, que se revelaría como la más insidiosa consecuencia de aquel crecimiento. Muy pronto ya no bastaría con asegurarse de que, aunque crezcan de forma desmesurada, los números siguen perteneciendo al mismo dominio.

Más complejo que los números naturales y racionales era, al menos en el plano teórico, el caso de los números reales, porque su definición implicaba la introducción de clases infinitas de números junto al uso sistemático de cuantificadores existenciales y universales, o sea, de proposiciones como «existe una x que cumple la propiedad P» o bien «para cada x es válida la propiedad P». Y también que si el análisis clásico, basado en el concepto de número real, no parecía comprometido con el descubrimiento de las antinomias, se exponía a críticas y reservas por parte de quienes, como los intuicionistas, no admitían entes matemáticos, números, conjuntos o funciones que no fueran efectivamente calculables.

Una vez establecidas las reglas del cálculo con los números racionales, los números reales eran definidos como secuencias fundamentales $a_1, a_2..., a_n$, de racionales que cumplen, volvemos a recordarlo, la siguiente propiedad: asignado un número ε, pequeño en todo caso, *se puede encontrar* un número natural k, dependiente de ε, para el que la distancia entre a_{n+p} y a_n, siendo $n > k$, es menor que ε para todo número natural p. Pero ¿qué significado dar a la expresión *se puede encontrar*? La matemática intuicionista solo admite el caso en que el *se puede* sirve para señalar que es

posible calcular efectivamente el índice k por el que la distancia entre a_{n+p} y a_n es menor que ε si $n > k$, es decir, que existe un procedimiento capaz de calcular ese valor crítico de k.[150] Esta simple observación, de la que Brouwer y los intuicionistas se sirvieron para atacar el análisis clásico, bastaba para convertir en ficticio precisamente aquel concepto de número atómico en el que Cantor había confiado para dar un sólido contenido de realidad al continuo matemático. Designar la secuencia fundamental con un símbolo no bastaba para convertir en real el número correspondiente a ese símbolo, a menos que no fuera posible el cálculo del índice k para el cual la distancia a_{n+p} y a_n se vuelve arbitrariamente pequeña para n mayor que k.

Para los matemáticos intuicionistas, el cálculo efectivo tenía unos fundamentos teóricos muy alejados de la concreción exigida por una ciencia de los algoritmos orientada a resolver problemas de aplicación del modo más eficaz posible. Brouwer consideraba la matemática como una acción cuya realidad se basa en la conciencia y en la intuición de una multiplicidad de sensaciones que se desarrollan en el tiempo. La construcción intuicionista de un número real, concebida como una definición gradual, en el tiempo, de intervalos cada vez más pequeños que lo incluyen, tampoco tenía la materialidad del cálculo de Turing, de Kleene o de Von Neumann. Más tarde, la matemática computacional teórica y aplicada se haría garante de la exigencia de construir según unos criterios más estrictos de eficiencia.

La necesidad de hacer efectivamente pequeñas, por medio de un procedimiento, las distancias entre las aproximaciones cerca del límite no responde solamente a la cuestión teórica de cómo se define un número irracional. Está implícita en ella la exigencia de una nueva conciencia de los fines de la matemática. La ciencia matemática debe poderse orientar en dos direcciones opuestas: de lo concreto a lo abstracto, y también de lo abstracto a lo concreto, y es, cuando menos, incierto cuál de las dos direcciones responde mejor a su más secreta inclinación. De hecho, al menos cuatro líneas de investigación demuestran la gran atención que los matemáticos han dedicado, a lo largo de los siglos, a la relación que sus teorías tienen con el mundo real, sea este material o indivisible: la doctrina

de los números-puntos de los pitagóricos y de los atomistas antiguos, la física matemática, la teoría de los números reales y la sucesiva ciencia del cálculo basada en el concepto de algoritmo.

Como observaba Giuseppe Peano, la finalidad de la matemática consiste, en buena medida, en calcular las cifras de los números que son soluciones de las ecuaciones que simulan los más diversos fenómenos de la naturaleza: «La finalidad de la matemática es determinar el valor numérico de las incógnitas que se presentan en los problemas prácticos. Newton, Euler, Lagrange, Cauchy, Gauss, y todos los grandes matemáticos desarrollan sus admirables teorías hasta el cálculo de las cifras decimales necesarias».[151] Ahora bien, la matemática puede llevar a cabo esta tarea solo si está orientada a lo concreto, además de a lo abstracto. Las ecuaciones diferenciales e integrales y los problemas de mínimo en que se expresan los modelos matemáticos de fenómenos naturales y artificiales nacen de concretas situaciones físicas, económicas e informáticas, y la naturaleza de las condiciones adicionales sobre las condiciones de contorno y sobre las condiciones iniciales de las funciones incógnitas está siempre motivada por la *realidad física* que se quiere simular. Sin embargo, la matemática no se limita a encontrar las ecuaciones que definen estos modelos. Deben cumplirse los requisitos que permitan elaborar su solución, y es relativamente raro que esta solución pueda expresarse con una fórmula analítica, como también es improbable que convenga utilizar una fórmula analítica, si es que existe, para encontrar la solución de una ecuación en términos de pura información digital.

Las soluciones escritas de forma analítica, cuando existen, suelen ser muy complicadas. Además, una fórmula analítica debería cumplir una condición de estabilidad: a pequeñas variaciones sobre los datos, deben corresponder pequeñas variaciones sobre el resultado; de lo contrario, la información transmitida por el modelo corre el riesgo de ser completamente distorsionada. No siempre esta condición se cumple, y a Jacques Hadamard se debe precisamente un ejemplo de problema a valores iniciales cuya solución analítica no depende de forma continua de los datos. Basta, pues, que estos se vean afectados por un mínimo error para no tener ninguna

información útil sobre la solución del problema. Problemas de ese tipo han sido llamados «mal planteados».[152] La exigencia de que la solución de una ecuación exista y sea única, y que el problema esté bien planteado, se atiene a una concepción clásica de la física matemática dominada por el presupuesto de que un acontecimiento físico se desarrolla de forma estable y determinada una vez establecidas las condiciones iniciales o de contorno.

> La visión de Laplace de la posibilidad de calcular todo el futuro del mundo físico con arreglo a un conjunto exhaustivo de datos sobre el estado actual es una expresión extrema de este enfoque. Sin embargo, este ideal racional de determinismo matemático basado en la idea de causa sufrió una gradual erosión en confrontación con la realidad física. Los fenómenos no-lineales, la teoría cuántica y la llegada de potentes métodos numéricos han demostrado que los problemas «bien planteados» están muy lejos de ser los únicos que reflejan los fenómenos reales.[153]

Sin embargo, no basta con asegurarse de que la solución analítica, supuesta como existente, sea continua respecto a los datos. En realidad, la modelización matemática comprende diferentes estadios: la fórmula del modelo debe ser aproximada, por lo general, por una fórmula aritmética y esta debe traducirse, por medio de procedimientos numéricos, a puro cálculo digital. En el caso más frecuente, en el que se aproxima el modelo diferencial con un modelo puramente aritmético, como un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, es necesario examinar la sensibilidad respecto a los errores sobre los datos de este modelo simplificado, así como la estabilidad del proceso que calcula su solución numérica. El cálculo comprende finalmente una enorme cantidad de operaciones elementales, y una multiplicidad de subprogramas que constituyen una elaboración *oculta*, a la que no tenemos acceso, pero en la que se apoya en gran medida el grado de fiabilidad de un proceso computacional. Beresford Parlett observaba lo siguiente en 1978:

> Hoy, gran parte de los cálculos mejor especificados en los detalles están *ocultos*. Esto significa que el usuario humano no ve ni los datos ni el resultado. En un gigantesco proceso de cálculo, los datos útiles a un programa secundario (como una transformada de Fourier) son generados por algunos programas, y los resultados son utilizados inmediatamente por otro. Esto es característico de un análisis numérico replegado [...]. Los algoritmos para el cálculo oculto deben ser mucho más seguros que los que producen resultados que serán vistos por un ojo humano. El tiempo de ejecución parece ser menos importante, pero tanto la fiabilidad como la eficiencia son esenciales. ¿Hasta qué punto, en cualquier caso, podemos mejorar ambos? Interesante pregunta.[154]

En líneas generales, la matemática ha atravesado, desde los tiempos de Leibniz y Newton, tres momentos cruciales, el tercero de los cuales se halla todavía en curso y está adoptando los perfiles de lo que suele llamarse *revolución digital*. Al primer descubrimiento, en el siglo XVII, de aquella grandiosa máquina analítica que recibió el nombre de análisis infinitesimal, le siguió un segundo paso, a finales del siglo XIX, conocido como *aritmetización del análisis*, igual de revolucionario: la búsqueda de los fundamentos del análisis de los conceptos de número, de conjunto y de paso al límite. En el número, ya fuera racional, real o transfinito, debía buscarse la realidad última, la actualidad auténtica de lo finito y también de lo infinito, a lo que la matemática nunca había dejado de mirar. Aquí se encontraban también las simientes de la tercera revolución: el desplazamiento del principio por el que era posible relacionar todo razonamiento con el concepto de número a la implementación de una variedad de métodos para calcular conjuntos de números. Los algoritmos y las listas de números calculados heredarían la información de los modelos iniciales y la traducirían, según los auspicios de un auténtico reduccionismo, a un nivel descriptivo diferente, más elemental. La posibilidad teórica de relacionar el análisis con el número y con operaciones de paso al límite debía convertirse en una aritmetización efectiva.

El último paso se debió a dos razones concomitantes: la crisis de los fundamentos de la matemática, que puso en duda la posibilidad de utilizar indiscriminadamente el concepto de conjunto, y el sorprendente desarrollo de la ciencia aplicada, ya en marcha desde finales del siglo XIX, que entre sus efectos tuvo también el desarrollo de la informática en el cálculo científico a mediados del siglo XX. Los algoritmos se convirtieron en objeto de estudio de la informática teórica, pero también, desde la segunda parte del siglo XX, en el núcleo teórico y práctico de una ciencia del cálculo a gran escala que debería traducir los problemas de la física matemática a un grandioso sistema de elaboración digital.

El principio de *realidad* fue desplazado, justamente, en esta tercera fase por la idea de *algoritmo*. Se observó a menudo, a lo largo de este paso, que la matemática no puede limitarse a procedimientos de abstracción, sino que debe seguir también la dirección opuesta, de los conceptos abstractos a la realidad concreta, a la *tierra*, por decirlo así. Precisamente, de la tierra, de las aplicaciones concretas a la realidad física, la matemática debía extraer la fuerza para liberarse del *impasse* de una crisis de los fundamentos que, de lo contrario, debilitaría la fuerza teórica, como enseña la leyenda de Hércules y Anteo. El gigante Anteo extraía su vigor de la madre Tierra y Hércules consiguió vencerlo manteniéndolo alzado en el aire y volviéndolo a alzar cada vez que caía. Anteo perdió así gradualmente las fuerzas, fue vencido y muerto; pero si se hubiera quedado en la tierra, su fuerza habría prevalecido.

A un principio de concreción apelaba en particular Andrej A. Markov Jr., a quien se deben importantes contribuciones sobre la formalización de la idea de algoritmo: «Las abstracciones son indispensables en la matemática: y, sin embargo, no deberían ser perseguidas por sí mismas, ni conducir a un punto en el que no haya posible bajada a la “tierra”. Deberíamos pensar siempre en la transición del pensamiento abstracto a la práctica como un momento necesario del aprendizaje humano de la realidad objetiva».[155]

Sin embargo, con la ciencia de los algoritmos, el siglo XX conoció también un nuevo tipo de abstracción, la *viabilidad virtual* o estudio de

teorías abstractas que hacen posibles los procesos de cálculo que se desarrollan en el espacio y el tiempo físicos de una máquina. Esta nueva abstracción, observaba Andrej A. Markov Jr.,[156] consistía en separarse, ante todo, de los límites reales de nuestras posibilidades de construcción y empezar a establecer sus presupuestos teóricos. La efectiva viabilidad debía considerarse, en primera instancia, solamente virtual. De hecho, en su célebre tratado sobre las funciones recursivas, Hartley Rogers declaraba plantearse «cuestiones de existencia y de no existencia de métodos computacionales, más que cuestiones de eficiencia o de válida elaboración».[157] En la propia máquina de Turing, descrita en su célebre artículo de 1937, se debía observar una singular combinación de concreción, típica de un artilugio mecánico, y de absoluta abstracción matemática, conforme a una idea inmaterial de calculabilidad. Una realización práctica, por medio de procedimientos concretos, dependería de la efectiva disponibilidad de recursos suficientes de tiempo y de espacio. De esto se ocuparía, desde la segunda mitad del siglo XX, una ciencia de los algoritmos encargada de medir el costo computacional de un procedimiento en términos, justamente, de espacio y tiempo de ejecución.

[143] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, cit., pp. 18-19.

[144] «Das Kontinuum als Medium freien Werdens»: es una expresión de Hermann Weyl. Véase H. Weyl, «Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik», en *Mathematische Zeitschrift*, X, 1921.

[145] F. Nietzsche, «Frammenti postumi, 1888-1889», en *Opere*, cit., vol. VIII, tomo III, 1974, p. 162.

[146] Véase D. Hilbert, *Sull'infinito*, en *La filosofia della matematica*, a cargo de C. Cellucci, Laterza, Bari, 1967, p. 179 (ed. orig. «Über das Unendliche», en *Mathematische Annalen*, XCV, 1926).

[147] É. Borel, «Les "paradoxes" de la théorie des ensembles», en *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, serie tercera, XXV, 1908

[148] Véase, por ejemplo, V. A. Uspensky, «Kolmogorov and Mathematical Logic», en *The Journal of Symbolik Logic*, LVII, 1992, p. 393.

[149] Véase E. Zermelo, «Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung», en *Mathematische Annalen*, LXV, 1908. Para la teoría de Von Neumann, se puede consultar P. R. Halmos, Naive Set Theory (1960), Springer, Nueva York, 1974

[150] Este es el caso, por ejemplo, en los números diagonales d y laterales l. Se puede calcular k de forma que la distancia entre 2 y la relación d^2: l^2 sea menor que una ε arbitrariamente pequeña si l es mayor que k, porque sabemos que esa distancia es igual a $d^2/ l^2 - 2 = \pm 1/l^2$. Esto implica que en la sucesión de las relaciones d^2/l^2 es *fundamental* en el sentido de Cantor. Sin embargo, como demostrò Brouwer, no siempre es posible el cálculo efectivo del índice k por el que la distancia entre a_{n+p} y a_n es menor que ε si $n > k$.

[151] G. Peano, «Interpolazione nelle tavole numeriche», en *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, LIII, 1917-1918, p. 693.

[152] Véase R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II: *Partial Differential Equations* de R. Courant, Interscience, Nueva York, 1962, p. 229 (ed. orig. *Methoden der mathematischen Physik*, *Springe*r, Berlín, 1924).

[153] *Ibid*., p. 230.

[154] B. Parlett, «Progress in Numerical Analysis», en *SIAM Review*, XX, 1978, pp. 448-449.

[155] A. A. Markov Jr., «On Constructive Functions», en *American Mathematical Society Translations*, serie segunda, XXIX, 1963, pp. 163-164.

[156] A. A. Markov Jr., *The theory of algorithms*, *ibid*., serie segunda, XV, 1960, p. 3.

[157] H. Rogers Jr, *Theory of recursive functions and effective computability*, McGraw-Hill, Nueva York, 1967, p. 31.

15

Crecimiento de los números

En la matemática griega, los procesos de aproximación, las progresiones de números y el aumento (o la reducción) de las figuras geométricas planteaban serias cuestiones sobre su prolongación hasta el infinito. Las dificultades se resolvían asignando al *ápeiron* un significado puramente potencial, como en los métodos de agotamiento o en los algoritmos interactivos, basados en la repetida e indefinida aplicación de un operador al valor aproximado de la solución de un problema, actualizado paso por paso. En estos algoritmos los números calculados crecían en correspondencia con el crecimiento o decrecimiento de las figuras y, puesto que la precisión habría requerido números cada vez mayores, el cálculo se habría vuelto completamente imposible a partir de cierto punto.

Sin embargo, en la matemática griega no existía el cálculo automático a gran escala, y se razonaba sobre números relativamente pequeños. Solamente Arquímedes, en el *Arenario*, pensó en la forma de concebir números muy grandes, de millones y millones de cifras, que habrían bastado para controlar los granos de arena suficientes para llenar todo el universo. Pero estos números, aunque altísimos, tampoco eran comparables con el infinito, y sobre todo no tenían cabida en una computación real. Así pues, en el tratado de Arquímedes no se percibe ninguna preocupación por su crecimiento, y tampoco se cuestiona su efectiva existencia.

En la moderna ciencia del cálculo, las dificultades se presentan también en los procedimientos con un número limitado de operaciones, por la

exigencia de un grado de efectividad que lo *finito*, por sí mismo, no es capaz de garantizar. En general, el cálculo automático con números racionales de la forma *p/q*, con *p* y *q* enteros, tiene una naturaleza problemática desde sus operaciones más elementales: no se puede excluir que unas pocas multiplicaciones produzcan números enormes, que excedan los límites de espacio de memoria del ordenador.

Se plantea también una pregunta: ¿cuánto es posible acercarse realmente a un número irracional mediante una fracción? El aumento o la disminución de las figuras geométricas tiene una contrapartida en el crecimiento de los números. Es ejemplar el caso de la aproximación de la raíz cuadrada de un entero con el método iterativo de Newton, en la que el número de cifras del numerador y del denominador de las fracciones aproximadas se duplica cada vez en correspondencia con una secuencia de cuadrados construidos con sucesivas correcciones gnomónicas. También los números laterales y diagonales crecen, aunque más lentamente.

Pero ¿hasta cuánto tiene sentido prolongar la iteración? En principio, los numeradores y los denominadores de las fracciones podrían crecer indefinidamente, con el fin de mejorar lo más posible la aproximación al número irracional. Sin embargo, existen límites objetivos a la disminución progresiva de la distancia entre el número irracional y la fracción aproximada. Con un teorema demostrado en 1844, Joseph Liouville establecía un límite teórico para la aproximación de un número irracional *algebraico*, es decir, de un número que fuera solución de una ecuación algebraica, obtenida igualando a cero un polinomio con coeficientes enteros: el error de aproximación, o sea, la distancia entre el número algebraico y una fracción aproximada *p/q*, no disminuye, con el crecimiento de *q*, cuanto querríamos o esperaríamos. Pero el teorema de Liouville abunda en implicaciones de otra naturaleza, desde la construcción de números transcendentes, es decir, no algebraicos, a la medida de velocidad de crecimiento de los números durante el proceso de aproximación de un número algebraico. En todo caso, el crecimiento de los números es el precio de un acercamiento progresivo a la solución del problema.

Más concretamente, un número es *algebraico* de grado k si es solución de una ecuación algebraica obtenida igualando a cero un polinomio de grado k, pero no un polinomio de grado inferior a k. Por ejemplo, el número $\sqrt{2}$ es algebraico de grado 2 porque es solución de la ecuación de segundo grado $x^2 - 2 = 0$ y no es solución de ninguna ecuación lineal (o sea, de grado 1). El teorema de Liouville afirma que para cada número algebraico x de grado $n > 1$, el crecimiento de q no produce el efecto de restringir, más allá de cierto límite, la distancia de x de una fracción aproximada p/q. Dicha distancia sigue siendo mayor de $1/q^{n+1}$ para denominadores q bastante grandes. Por ejemplo, la diferencia en valor absoluto entre un número irracional definido por la raíz cuadrada de un entero positivo y su fracción aproximada p/q sigue siendo superior, para q bastante grande, a $1/q^3$. Los números que no son soluciones de ninguna ecuación algebraica, los números «transcendentes» como e y π, no están sujetos a esta limitación. Existe una infinidad no numerable de números *transcendentes*, porque los números algebraicos, como demostró Cantor, forman un conjunto numerable y los números reales, que incluyen números algebraicos y números transcendentes, forman un conjunto de potencia superior al numerable. Gracias a su teorema, Liouville consiguió mostrar por primera vez cómo se pueden construir números transcendentes. Los números transcendentes de Liouville tienen la forma

$$a = 0.a_1\, a_2\, 000\, a_3\, 00000000000000000\, a_4\, 000000000.....$$

en donde a_i es una cifra decimal, comprendida entre 1 y 9, y los grupos de ceros tienen una longitud que crece muy rápidamente (con velocidad factorial; por lo tanto, más que exponencial). Ahora bien, suponiendo que a sea un número algebraico de grado n, si se considera una aproximación b de a obtenida con un número suficiente (dependiente de n) de grupos de ceros, se obtiene una distancia entre a y b que es incompatible con el teorema de Liouville. Por consiguiente, a no puede ser un número algebraico. En este

caso, el crecimiento muy rápido de la longitud de las secuencias de ceros es justamente lo que permite establecer que *a* es trascendente.[158]

El teorema de Liouville permite también medir la velocidad de crecimiento del denominador de las fracciones con que se aproxima, mediante un algoritmo iterativo, un número algebraico *z*: el crecimiento es más rápido cuanto mayor es la velocidad de convergencia del método, es decir, cuanto más rápidamente se acercan a *z* las fracciones calculadas. Y el mismo teorema permite también encontrar una relación entre el tamaño del denominador y el número de operaciones necesarias para calcularlo.[159]

Sin embargo, el inconveniente principal del crecimiento de los números es otro. En el cálculo digital, los números consisten en secuencias finitas de cifras binarias (0 y 1). Pero en cada operación con estas secuencias, cuyo número de cifras no puede superar un límite establecido, se produce un error de redondeo que puede generar inestabilidad numérica y una pérdida fatal de la información necesaria para conocer la solución de un problema con la suficiente exactitud. La teoría de la perturbación es un capítulo esencial del cálculo digital, así como de la teoría de los sistemas dinámicos y del caos determinístico. Una condición para la predictibilidad del comportamiento de un fenómeno simulado por un sistema dinámico discreto, definido por una simple ley iterativa, es la sensibilidad respecto a los errores. La previsión de desarrollo de un fenómeno puede ser no fiable si se admiten perturbaciones, aunque sean de mínima entidad, sobre las condiciones iniciales de su desarrollo.

El cálculo mediante números racionales en la forma *p/q* es, por lo general, impracticable. El numerador *p* y el denominador *q* suelen crecer demasiado rápidamente, hasta el punto de superar los límites de espacio de memoria de la máquina. El crecimiento de los números se refleja también en la complejidad computacional. El cálculo de *p* y de *q* es mucho más laborioso al crecer estos números. Un primer remedio consiste en abandonar la representación de un número racional en la forma *p/q* y en usar números en coma flotante $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)\ B^k$, donde *n* es un número preestablecido y la información sobre la magnitud del número es desplazada al exponente *k*. Solo en casos concretos puede ser ventajoso el cálculo tradicional con

fracciones, por medio no tanto de simplificaciones obtenidas dividiendo *p* y *q* entre eventuales factores comunes, como de continuas aproximaciones y técnicas especiales de redondeo.[160] Pero este recurso no basta para evitar los inconvenientes debidos a casos de crecimiento anormal de los números o de las operaciones. El crecimiento puede hacer que se desvanezca toda pretendida realidad de lo que se quiere calcular.

Como escribe Donald Knuth, «la experiencia del cálculo de fracciones muestra que en muchos casos los números crecen hasta hacerse muy grandes [...] es importante incluir un test de *overflow* en cada programa que realice una adición, una multiplicación o una división».[161]

La matemática no se ocupa, generalmente, de calcular números, ya sean pequeños o grandes. Si lo hace, suele ser por necesidades prácticas y aplicativas. Sin embargo, la pregunta de *cómo* hacerlo, de *cómo* se pueden realmente calcular los números indispensables para una descripción del mundo, plantea problemas de gran interés teórico. La traducción de los modelos diferenciales integrales a algoritmos y a cálculo digital a gran escala, que por otra parte es la versión actualizada de la aritmetización del análisis de finales del siglo XIX, lleva a reformular los grandes temas abordados por las investigaciones sobre los fundamentos de principios del siglo XX: ¿cuándo y de qué forma un problema o una clase de problemas admite solución? ¿Qué significa resolver *efectivamente* un problema? ¿Qué significado adoptan lo finito y lo infinito en los procedimientos automáticos? ¿Qué relación hay entre lo continuo y lo discreto?

A comienzos de los años cuarenta, el cálculo numérico, consistente en resolver en términos *numéricos*, en vez de puramente *analíticos*, una ecuación,[162] estaba todavía en un estadio bastante inicial: era un arte más que una ciencia del cálculo. La situación era en cierto sentido paradójica, porque desde los cálculos babilónicos del periodo antiguo, es decir, alrededor del 1800 a. C., la matemática se ha basado en algoritmos puramente *aritméticos* y *numéricos*, que se encuentran en parte eclipsados también en la teoría rigurosamente *geométrica* de los *Elementos* de Euclides.

Los procedimientos utilizados para aproximar números irracionales, así como los basados en la *antanaíresis*, tenían una forma iterativa: los valores aproximados eran calculados con fórmulas recurrentes que reproducían numéricamente el crecimiento de figuras geométricas. Algebraicamente, el algoritmo euclidiano estaba relacionado por lo general con la construcción de fracciones, las llamadas *fracciones continuas*, capaces de aproximar los números irracionales, y los números reales se pueden *definir* en términos de fracciones continuas. Pero la generación recursiva de los numeradores y denominadores de las fracciones produce a menudo fenómenos de crecimiento incontrolado que pueden provocar una detención del cálculo.

El cálculo más avanzado ha heredado sorprendentemente los esquemas de la matemática antigua, ya inspirada por los dioses; pero los criterios que lo conforman han impuesto también un análisis de la eficiencia de los procedimientos. Las fórmulas antiguas, cuando eran de naturaleza recursiva, eran ya procedimientos mecánicos, conformes a las más recientes exigencias del cálculo digital. Pero solo ahora se es consciente de que cada ciclo de un proceso recursivo, por simple que sea, puede heredar los errores cometidos en los ciclos anteriores.[163] Y entonces es fatal que incluso las más elementales relaciones recurrentes con las que se construyen las fracciones para aproximar números irracionales se expongan a fenómenos de inestabilidad numérica que vuelven *irreales* esas mismas entidades numéricas que Kantor y Dedekind consideraban efectivamente existentes.

A relaciones recurrentes se deben también el cálculo de funciones especiales, así como las llamadas funciones de Bessel, y también clases especiales de números, como los números de Bernoulli. Jakob Bernoulli los introdujo por primera vez en su *Ars Conjectandi* (1713), y Leonhard Euler los estudió después con más detalle. Estos números están implicados en simples sumas discretas que aproximan integrales y, por tanto, en cuestiones que atañen a la relación entre continuo y discreto, entre cálculos aritméticos y fenómenos continuos, entre números y magnitudes geométricas, que siempre han marcado la investigación matemática desde las paradojas de Zenón. Sus propiedades, así como su singular relación con el número π, justifican un estudio de enorme interés teórico. Los números

de Bernoulli son números racionales, fracciones cuyos denominadores son conocidos de forma explícita, pero no los numeradores, que son números en rápido crecimiento. Para calcularlos se han ideado en época reciente complejos algoritmos: dos de los cinco factores primos del numerador de B_{200}, el ducentésimo número de Bernoulli, de 90 y 115 cifras, han sido valorados gracias a los más potentes ordenadores digitales. Ya Euler debía de asombrarse ante la velocidad de crecimiento de los números de Bernoulli. Estos forman, comentaba, una «secuencia que diverge velozmente y crece con más fuerza que cualquier otra secuencia geométrica de términos crecientes».[164]

[158] Para más detalles, se puede consultar R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*, cit., pp. 176-180.

[159] Véase M. S. Paterson, «Efficient iterations for algebraic numbers», en *Complexity of Computer Computations*, a cargo de R. E. Miller, J. Thatcher, Plenum Press, Nueva York-Londres, 1972, y D. Bertaccini, C. di Fiore, P. Zellini, *Complessità e iterazione*, Bollati Boringhieri, Turín, 2013, p. 355. En un método iterativo de orden p que calcula a cada paso k una expresión racional g que proporciona un valor aproximado p/q de una raíz z de una ecuación algebraica (el orden mide la velocidad con que se acerca a z), el denominador q, para k bastante grande, supera el valor Ld^s con $s = r^k$ para todo $r < p$, donde L y d son constantes, con d mayor que 1.

[160] Véase M. S. Paterson, «Efficient iterations for algebraic numbers», en *Complexity of Computer Computations*, a cargo de R. E. Miller, J. Thatcher, Plenum Press, Nueva York-Londres, 1972, y D. Bertaccini, C. di Fiore, P. Zellini, *Complessità e iterazione*, Bollati Boringhieri, Turín, 2013, p. 355. En un método iterativo de orden p que calcula a cada paso k una expresión racional g que proporciona un valor aproximado p/q de una raíz z de una ecuación algebraica (el orden mide la velocidad con que se acerca a z), el denominador q, para k bastante grande, supera el valor Ld^s con $s = r^k$ para todo $r < p$, donde L y d son constantes, con d mayor que 1.

[161] D. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Addison-Wesley, Reading (Mass.), vol. II, 1969, p. 292.

[162] Piénsese en una ecuación algebraica, definida por un polinomio en x igualado a cero. Si el polinomio tiene grado mayor que 4, la ecuación no admite, en general, una solución en forma

analítica. Entonces es necesario aproximar las soluciones con procedimientos numéricos, que calculan secuencias de números racionales que se acercan a aquellas soluciones hasta la precisión exigida. Una situación análoga se tiene para las ecuaciones diferenciales integrales, cuya solución no es expresable con una fórmula analítica y es, por tanto, necesario aproximarla numéricamente. Para ello es preciso, en la mayor parte de los casos, resolver sistemas de ecuaciones lineales con matrices de coeficientes de elevada dimensión.

[163] Véase W. Gautschi, «Computational aspects of three-term recurrence relations», en *SIAM Review*, IX, 1967. Por ejemplo, una relación recurrente de tres términos de la forma $y_{k+1} = ay_k + by_{k-1}$, que permite calcular y_k, para $k = 2, 3...$, con valores iniciales asignados y_0 e y_1, suele caracterizarse por fenómenos de inestabilidad, es decir, de crecimiento incontrolado del error. Con análogas estrategias iterativas, se resuelven, en lo discreto, simples sistemas de ecuaciones diferenciales, y en tal caso las perturbaciones sobre los valores iniciales pueden causar crecimientos exponenciales de términos con desarrollo oscilatorio que provocan fenómenos de inestabilidad. Para esto, véase G. Dahlquist, «33 years of numerical instability, Part I», en *Bit Numerical Mathematics*, XXV, 1985, y G. Dahlquist, Åke Björck, *Numerical Methods* (1974), Dover, Nueva York, 2003, pp. 342, 373.

[164] Citado en A. Knoebel, R. Laubenbacher, J. Lodder, D. Pengelley, *Mathematical masterpieces*, Springer, Nueva York, 2007, p. 65.

16

Crecimiento de las matrices

Todos los problemas de la matemática aplicada y computacional se reducen finalmente a resolver un sistema de ecuaciones *lineales*. Es esta una tesis, o, mejor dicho, una constatación, ya ampliamente difundida y compartida. Si los problemas no son lineales se linealizan, obteniéndose así, de forma aproximada, las primeras informaciones útiles sobre la solución de una ecuación diferencial o integral, en un problema de mínimo o de aproximación polinomial. La aproximación no es un daño, es la norma, y todo consiste en cuantificarla, en establecer cuándo es posible y conveniente. La linealización implica un error de aproximación, pero no mayor que otros errores que toman el relevo en los diferentes pasos que llevan desde las ecuaciones iniciales al puro cálculo digital.

A partir de la segunda mitad del siglo XX, se vio claro que los sistemas de ecuaciones lineales útiles a las aplicaciones tienen dimensiones muy elevadas; y dado que un sistema de ecuaciones lineales es identificado por una *matriz* de coeficientes, o sea, por una tabla de números dispuestos en filas y columnas, en las décadas en las que tuvo lugar el primer desarrollo del cálculo digital se hizo urgente la necesidad de un estudio profundo del cálculo matricial a gran escala. Ahora bien, esto era precisamente la dificultad principal: convertir el modelo inicial, es decir, la ecuación diferencial o integral, en cálculos puramente aritméticos necesarios para resolver un sistema de ecuaciones lineales. El término *lineal* no debe llevarnos a engaño. La distinción entre lineal y no lineal ha marcado a

menudo, en la matemática computacional y aplicada, un límite decisivo de resolubilidad, pero existen problemas *lineales* absolutamente refractarios a todo intento de resolución. Esto se comprueba generalmente cuando la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales está muy mal condicionada, es decir, cuando hay una elevada sensibilidad de la solución del sistema respecto a errores de los datos.

Una *matriz A* de n filas y m columnas es una tabla de números dispuestos en rectángulo, donde el elemento de posición (i, j), que se encuentra en la fila i y en la columna j, se designa con el símbolo a_{ij}. Si $n = m$, la matriz es cuadrada. Las matrices son entes matemáticos en sí mismos, como lo son los números, los polinomios y las funciones, y el álgebra de las matrices se basa en operaciones de suma, producto e inversión análogas a las operaciones entre números, pero por lo general carentes de algunas propiedades válidas para los números, como la conmutatividad del producto. Los elementos de una matriz pueden ser los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales, mientras que los términos independientes de las ecuaciones son colocados en una columna de números que define un *vector*.

En el imaginario común, un vector se concibe generalmente como una flecha, con su dirección y longitud, pero también es posible concebirlo como una columna de números. En el plano cartesiano, un vector v con un extremo en el origen se puede representar con una columna de solo dos números x e y, correspondientes a sus proyecciones sobre los ejes.

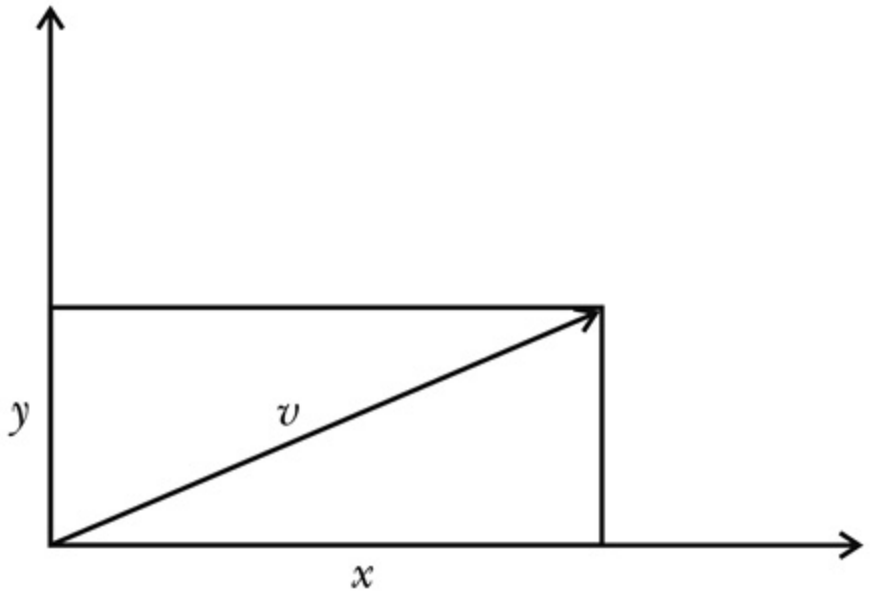


Figura 8

En un espacio de *n* dimensiones, un vector *v* se define, simplemente, como una columna de *n* números. El número de dimensiones no presupone necesariamente una idea de espacio o de espacio-tiempo. Introducir más dimensiones puede ser simplemente *una forma de pensar un problema en términos matemáticos*. En economía puede ser necesario configurar un gasto por sectores industriales. Si existen, pongamos por caso, diez sectores (industria automovilística, textil, naval, de la construcción, etc.), el gasto estará representado por un vector de diez componentes, cada uno de los cuales es el número que mide el gasto en un determinado sector.

Una matriz cuadrada *A* actúa sobre un vector *v* como un operador o una transformación que asocia a *v* otro vector *w*. Se escribe entonces $w = Av$, y se dice que *w* es igual al producto de *A* por *v*.[165] Resulta relevante, entonces, el caso en el que, bajo el efecto de un operador matricial *A*, el vector *v* no cambia de dirección, o sea, se transforma en un vector *w* que tiene los mismos componentes que *v* multiplicados por un mismo número λ, real o complejo. Se escribe entonces $Av = \lambda v$, una fórmula que expresa una especie de invariancia, porque la dirección del vector permanece inmutable bajo el efecto del operador *A*. En tal caso, λ es un *autovalor* de la matriz *A*,

mientras que v es el *autovector* correspondiente. En muchos casos, son los autovalores de una matriz los que deciden el grado de eficiencia de un método para resolver un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ (donde b es el vector de los términos independientes), así como la sensibilidad de la solución x respecto a los errores en los datos A y b.

El álgebra de los vectores y de las matrices se desarrolló inicialmente en el ámbito geométrico y algebraico, pero con el tiempo fueron cada vez más evidentes las implicaciones del cálculo matricial en diferentes sectores de la matemática aplicada, en el estudio de los equilibrios, en la mecánica, en la física teórica, en la ingeniería electrónica y en la informática; por ejemplo, en sus interacciones con los aspectos numérico-computacionales de los motores de búsqueda en red.

La verdadera novedad del cálculo, a comienzos de los años cuarenta y cincuenta, estribaba en la elevada *dimensión* de los problemas, y en el hecho de que las matrices de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales, que se proponga simular con suficiente precisión un fenómeno físico, tienen decenas de miles de filas y columnas. La resolución de un sistema así exige, pues, un procedimiento automático que tenga en cuenta las técnicas de *representación* de los números, el *tiempo* de ejecución y el *espacio* de memoria necesario. Esta circunstancia impone un cambio radical de las leyes aritméticas con las que se efectúan los cálculos.

El álgebra de las matrices se convierte a su vez en un capítulo central del cálculo digital. Al álgebra lineal y al cálculo matricial se reducen casi todos los problemas computacionales de la matemática.[166] Son indicativas, a este respecto, las palabras de Gilbert Strang: «Para los ingenieros y los investigadores, el álgebra lineal ocupa ahora un espacio en las ciencias físicas y sociales que a menudo es más importante que el cálculo [*calculus*]. Mi generación de estudiantes, y por supuesto mis maestros, no se percataron de la llegada de esta novedad. Se trata en parte del paso de lo analógico a lo digital; las funciones son sustituidas por vectores. En el álgebra lineal el análisis de los espacios n-dimensionales se combina con las aplicaciones de matrices».[167]

En las primeras fases de desarrollo del cálculo a gran escala, en los años cuarenta, un manual estándar de frecuente consulta era el texto de Whittaker y Robinson *The calculus of observations*, publicado en distintas ediciones. Pero este texto se centraba sobre todo en los problemas de interpolación, en la resolución de ecuaciones no lineales, en la cuadratura numérica y en el análisis de Fourier. La resolución de un sistema de ecuaciones lineales no figuraba entre los problemas analizados: solo era un apéndice funcional de una teoría de la aproximación basada en la técnica de los mínimos cuadrados, y el único método aconsejado, y descrito en pocas páginas, era el de Cramer. La ineficiencia de este método se demostró al poco tiempo.

El manual de Whittaker y Robinson fue consultado también por James Wilkinson, uno de los padres de la ciencia del cálculo del siglo pasado, que trabajó junto a Alan Turing en el National Physical Laboratory entre 1946 y 1948. En aquel periodo, el Armament Research Department encargó a Wilkinson resolver un simple sistema de 12 ecuaciones lineales con 12 incógnitas y su tentativa inicial, como él mismo cuenta, fue el método de Cramer. Aquella era seguramente la primera vez que un procedimiento recursivo, con un número *finito* de operaciones, se revelaba absolutamente *irrealizable*. La causa no era el problema, sino el método, que requiere un número factorial de operaciones aritméticas y, por tanto, para solo 50 ecuaciones, un tiempo de cálculo —con aproximadamente 10^{-6} segundos para realizar una multiplicación— superior al que transcurre desde el nacimiento del universo por un hipotético *big bang* hasta hoy. De todas formas, es evidente que una solución calculable en tiempo astronómico, aunque finito, no existe en absoluto: en cierto sentido, es completamente *irreal*. La causa era el crecimiento anormal, más que exponencial, de la cantidad de operaciones aritméticas.[168]

En 1894, David Hilbert publicó un artículo sobre la aproximación, con el criterio de los mínimos cuadrados, de una función continua mediante un polinomio.[169] El problema abordado por Hilbert respondía a una fundamental estrategia computacional: reducir la valoración de una función cualquiera (continua) a un modelo simplificado de cálculo, como el de un

polinomio, consistente únicamente en adiciones y multiplicaciones. La matemática siempre ha buscado estas simplificaciones, desde el álgebra de Newton, quien se proponía representar funciones $f(x)$ de notable complejidad analítica con simples combinaciones de potencias de la x. En el siglo XIX, varios matemáticos se habían dedicado, antes de Hilbert, a este tema, y en 1885 Weierstrass demostró que toda función continua, definida en un intervalo cerrado, se deja aproximar uniformemente por un polinomio. Por tanto, a no ser que se diera un error de aproximación inevitable, el cálculo de la función continua se reducía, al menos en principio, a un número finito, dependiente del grado del polinomio aproximado, de sumas y multiplicaciones. También esto formaba parte del proyecto más amplio de aritmetizar el análisis.

Ahora bien, el problema de Hilbert requería la resolución de un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz H de los coeficientes, cuadrada con n filas y n columnas, es conocida hoy como un modelo de matriz numéricamente intratable. La matriz H es conocida con el nombre de *matriz de Hilbert*.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & 1/(n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/n & 1/(n+1) & \dots & \dots & 1/(2n-1) \end{bmatrix}$$

George Forsythe, uno de los padres de la ciencia del cálculo en el siglo pasado, se ocupó décadas más tarde de la matriz de Hilbert. En un importante artículo de 1970, observaba que, para una dimensión n apenas superior a 8 o a 9, no hay proceso automático capaz de resolver un sistema de n ecuaciones lineales en n incógnitas definido por H, y que, para valores

pequeños de n, como $n = 6$, había una gran discrepancia entre las soluciones de problemas aparentemente idénticos calculadas con máquinas ligeramente diferentes. Hoy diríamos que la razón de estos inconvenientes radica en que la matriz de Hilbert está muy *mal condicionada*. Ahora bien, se dice que un problema está mal condicionado cuando pequeñas variaciones sobre los datos de entrada pueden producir grandes variaciones sobre la solución, independientemente del procedimiento llevado a cabo para calcularla.

El procedimiento de aproximación estudiado por Hilbert consiste en minimizar el error sustituyendo una función continua por un polinomio. Para convertir en mínimo el error, es necesario, por tanto, resolver un sistema de ecuaciones lineales $Hx = b$ cuya matriz H es intratable también para pequeñas dimensiones.[170] Ya para $n = 6$ los elementos de la inversa H^{-1} de H hacen presagiar su crecimiento desmesurado para valores de n apenas algo superiores.[171] Ahora bien, el número 4410 000 en la posición (5, 5) de la inversa de H es capaz de amplificar de forma catastrófica una perturbación, aunque sea muy pequeña, sobre el quinto elemento del vector b de los términos independientes.[172]

$$\begin{bmatrix} 36 & -630 & 3360 & -7560 & 7560 & -2772 \\ -630 & 14700 & -88200 & 211680 & -220500 & 83160 \\ 3360 & -88200 & 564480 & -1411200 & 1512000 & -582120 \\ -7560 & 211680 & -1411200 & 3628800 & -3969000 & 1552320 \\ 7560 & -220500 & 1512000 & -3969000 & \mathbf{4410000} & -1746360 \\ -2772 & 83160 & -582120 & 1552320 & -1746360 & 698544 \end{bmatrix}$$

Para $n = 6$, el número 4410 000 es el elemento de máximo módulo de la matriz H^{-1}; pero si dejamos que n crezca, los errores en los elementos de x se vuelven cada vez mayores. Para $n = 10$, el máximo elemento, en modulo, de la matriz inversa es 3.48×10^{12} y, por lo tanto, si hay un error en algún elemento de b, podría haber un error desmesurado en algunos elementos de la solución x. El número de condicionamiento de la matriz asciende aproximadamente a 10.[13]

Todo esto tiene que ver con la estructura del *problema* matemático y no depende de la elección del algoritmo encargado de resolverlo. Pero también hay un grado de sensibilidad del sistema de cálculo respecto a los errores sobre las distintas operaciones del algoritmo. Al darse cuenta de que el método de Cramer para resolver un sistema de 12 ecuaciones era completamente ineficiente, Wilkinson decidió utilizar el algoritmo de Gauss, que consiste en igualar a cero todos los elementos de la matriz de los coeficientes bajo la diagonal principal, reduciéndola así a una matriz T de forma triangular (con los elementos bajo la diagonal iguales a cero). El método de Gauss es incomparablemente más eficiente que el de Cramer, pero no siempre es capaz de evitar un crecimiento anormal de los números que son poco a poco calculados. De este crecimiento depende la entidad del error de cálculo, y una fórmula que establece un límite superior del error en función del tamaño de los elementos de la matriz triangular expresa con precisión determinística esta dependencia.

Normalmente, el error que se comete con el método de Gauss se limita superiormente con una expresión E que consiste en una medida de la *magnitud* de la matriz de los coeficientes A multiplicada por el cuadrado de n y por un *factor de crecimiento*. Este factor se define precisamente por la relación (en valor absoluto) entre el máximo de los elementos calculados de la matriz triangular T y el máximo de los elementos de A. El resultado no tiene un significado probabilístico, sino determinístico, en el sentido de que, para cada valor posible de la dimensión n de la matriz, el error nunca podrá superar a E.[173] Se puede concluir, por tanto, que, cuando los valores calculados de T se vuelven muy grandes, el diseño computacional pierde todo el sentido. El factor de amplificación del error se puede expresar de

diferentes maneras, pero siempre acaba dependiendo del crecimiento de los números efectivamente calculados.

En 1946, Hotelling estableció un límite del error de naturaleza exponencial, proporcional a 4^n, que impedía confiar en la posibilidad de resolver numéricamente los problemas de la física matemática con procedimientos automáticos. Sin embargo, las pesimistas previsiones iniciales fueron rectificadas por análisis más exactos. En 1947, John von Neumann y Herman Goldstine publicaron un artículo histórico en el que se analizaba el comportamiento del error en la inversión de una matriz simétrica definida positiva,[174] con el método de Gauss, mediante una aritmética con un índice preestablecido de exactitud, Von Neumann y Goldstine demostraron que el error, por muy sujeto que esté a fluctuaciones no directamente controlables, no supera una cantidad establecida, que depende de la dimensión de la matriz, del número de cifras con el que se realizan los cálculos y de la relación entre el autovalor máximo y el autovalor mínimo de *A*.[175] Se trataba de un resultado como poco milagroso: para grandes dimensiones de la matriz y para millones o miles de millones de operaciones aproximadas podía parecer necesario un análisis *estadístico* de la distribución de los errores de redondeo (que fue en todo casi realizado); pero el resultado de Von Neumann y Goldstine tenía un carácter *determinístico*, si bien dentro de los límites de un intervalo de indeterminación: el error, de por sí incognoscible, no superaría en todo caso un cierto umbral, que era, en principio, perfectamente valorable e independiente del crecimiento de los números calculados.

En 1971, en un importante artículo de recapitulación del análisis del error elaborado en los veinte o treinta años anteriores, Wilkinson[176] observó que es inexacto afirmar que el error acumulado en ciertos estadios de un cálculo *se amplifica* en los estadios sucesivos, y que, en todo caso, si el número de operaciones es bastante elevado, los errores se compensan estadísticamente, hasta el punto de disminuir, paradójicamente, el efecto. El enemigo más temible no es la propagación del error en las operaciones, sino el error *inherente al problema* de la inversión de la matriz, es decir, el grado de sensibilidad intrínseca de la inversa de *A* respecto a pequeñas variaciones

sobre los elementos de *A*, cualquiera que sea el método de resolución elegido. Esta sensibilidad se mide por un *índice de condicionamiento*.

El concepto de condicionamiento de una matriz fue precisado por vez primera en 1948 por Alan Turing en un artículo sobre la resolución numérica de un sistema de ecuaciones lineales y sobre la inversión de una matriz *general*, es decir, no necesariamente simétrica y definida positiva, con elementos iguales a números reales.[177] Turing introducía una *norma*, un número real asociado a la matriz, un índice que debía expresar la *magnitud*; no la dimensión, dada por el número *n* de filas y de columnas, sino la magnitud total de sus elementos. La norma elegida por Turing, hoy conocida como norma de Frobenius, era definida por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los elementos de la matriz: un simple *número*, por tanto, encargado de medir la magnitud de toda una *matriz*. Ahora bien, observaba Turing, se puede expresar tanto el error en la solución de un sistema de ecuaciones lineales como el error en los elementos de la matriz de los coeficientes multiplicado por un factor μ igual al producto de la norma de *A* por la norma de la inversa de *A* (dividido por *n*). Así pues, la amplificación del error presente en los elementos de *A* dependía de la magnitud de este factor, que adoptaba, por tanto, el significado de *número de condicionamiento*. Si μ es elevado, no sabremos si los números calculados darán una información plausible sobre la solución exacta del sistema lineal; lo cual es como decir que no tendremos información suficiente sobre la solución de las ecuaciones, de la que el sistema lineal es una aproximación aritmética, que definen el modelo matemático del fenómeno físico cuya evolución nos interesa predecir. Prever el desarrollo de dicha evolución es, en cambio, posible si μ es relativamente pequeño.

Estas consideraciones prescinden del algoritmo elegido para resolver el sistema de ecuaciones lineales: el número de condicionamiento solo depende de las propiedades intrínsecas de *A* y de su inversa. Sin embargo, el índice μ interviene también en la estabilidad de los algoritmos, concretamente de los procedimientos efectivos con los que se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones, o sea, de la forma en que el error se propaga a través de las operaciones. La medida de la sensibilidad del

resultado del cálculo respecto a errores en las operaciones (necesariamente aproximadas) se resume en una expresión que depende esencialmente de μ.[178] Esta circunstancia estaba ya implícita en el artículo de 1947 de Von Neumann y Goldstine sobre la inversión de matrices simétricas y definidas positivas. En aquel artículo el error no supera un valor dependiente de un factor μ expresable como relación entre el autovalor máximo y el autovalor mínimo de A; pero esta relación coincide con la relación entre $N(A)$ y $N(A^{-1})$, donde N designa una norma, la norma euclidiana, equivalente —aunque no idéntica— a la norma de Frobenius utilizada por Turing.[179] En el caso específico de matrices simétricas y definidas positivas considerado por Von Neumann y Goldstine, la norma euclidiana coincide con el autovalor máximo de la matriz. En tal caso, es el mismo autovalor máximo el que mide numéricamente la *magnitud* de la matriz.

Para concluir, el error total no supera un valor que depende de la forma en que crecen los números durante el proceso computacional. Si estos números se vuelven muy grandes, disminuye, junto a la precisión del cálculo, toda la capacidad de previsión del modelo matemático. No se trata solamente de la pérdida de información debida al redondeo de números muy grandes; ni del riesgo de *overflow*. El hecho clave es que el crecimiento de los números calculados, al aumentar el índice de condicionamiento, impide una previsión de comportamiento del error. Dicho índice interviene como componente esencial en la expresión que define el límite superior del error, un límite que no puede ser superado. Si el límite es un número elevado, el error *puede* ser grande,[180] y es precisamente esta situación de incertidumbre lo que hace dudoso e inescrutable el significado de los números impresos al final del proceso de cálculo.

No es solo el crecimiento de los números lo que mina un sistema de cálculo; también su decrecimiento, y las consiguientes operaciones para números próximos al cero, puede producir resultados inesperados, hasta determinar la detención del proceso de cálculo. En todos los casos críticos, la solución del problema se vuelve evanescente y, en cierto modo, completamente irreal. Hay teoremas que afirman, en teoría, su existencia, pero ninguno es capaz de calcular sus cifras.

Lo cierto es que, al contrario de lo que pensaban Cantor o Frege, no todos los números tienen el mismo estatus ontológico. Los números que existen, pero que no se pueden calcular, no tienen la misma realidad que los números calculados por la máquina. Los primeros no se sitúan, a diferencia de los segundos, en el espacio y el tiempo de una efectiva elaboración automática, ni actual ni virtualmente. Desde cierto punto de vista, un número existe, es real, solo si hay un procedimiento efectivo que lo calcula. Pero este procedimiento debe ser también *eficiente*: de lo contrario, como en el caso del método de Cramer o de la matriz de Hilbert, no se podría distinguir, en el plano de una *efectiva* viabilidad, lo calculable de lo no calculable. Lo que es calculable es como si no lo fuera.

Boezio explicó que, por muy diferentes que sean entre sí, los números están compuestos exclusivamente por ellos mismos.[181] El concepto de campo *F* cerrado aseguraría después que, combinando los números con las operaciones definidas en *F*, no se encontraran elementos ajenos, sino únicamente elementos de *F*. Sin embargo, ¿qué decir de los números calculados por una máquina? En tal caso, las operaciones sobre los números generan siempre otros números, pero estos, en el curso de la computación, podrían perder todo significado. El cierre algebraico del campo no basta para garantizar el significado de los números generados en un proceso computacional.

El concepto de número entero no puede explicar por sí solo, en toda su generalidad, el concepto de algoritmo como proceso efectivo que se desarrolla en el tiempo y en el espacio. Dedekind buscó una respuesta afirmativa, pero solo consiguió demostrar que la recursión aritmética, limitada a las operaciones de suma, producto y división, se reduce a propiedades de teoría de conjuntos que permiten construir el concepto de número natural. ¿Qué significa exactamente *efectivo*? El término, utilizado de forma informal, aparece con frecuencia en la literatura, y nunca es definido de forma explícita. Andrej A. Marko Jr. trató de explicar que la efectividad de un algoritmo es una prerrogativa esencial suya y consiste en la «tendencia del algoritmo a obtener un cierto resultado»,[182] calculado a partir de un conjunto de datos iniciales. Se impuso entonces la costumbre de

llamar efectivo a un proceso de cálculo definido de forma recursiva (un criterio equivalente al λ-formalismo o a la máquina de Turing), basándose en el hecho de que la recursión, desde la teoría de Dedekind en el siglo XIX, es la técnica para definir constructivamente las operaciones fundamentales de la aritmética. Pero paralelamente al esfuerzo centrado en su definición teórica, el algoritmo se convirtió también en el protagonista de una matemática computacional dirigida a resolver los problemas de la ciencia aplicada. Y en este sentido, al menos desde mediados del siglo XX, el acento empezó a desplazarse desde la efectividad a un requisito más radical y operativo de *eficiencia*.

El diseño fundamental siempre ha consistido en aritmetizar la matemática, en reducir el análisis al concepto de número entero y a las operaciones de paso al límite. Pero para llevar a cabo esta reducción se necesitaban algoritmos eficientes, sea para impostar complejas estrategias computacionales, sea para efectuar los cálculos aritméticos elementales «ocultos» en el interior de esas estrategias, como las sumas y multiplicaciones entre números, las interpolaciones lineales y los productos entre polinomios o entre matrices. Repetimos: el ordenador efectúa millones de operaciones y utiliza numerosos subprogramas que producen una caterva de resultados intermedios difícilmente accesibles. En presencia de este inmenso cálculo oculto, se debe poder contar con una aritmética de máquina que simule la aritmética exacta de la forma más eficiente posible, en términos tanto de estabilidad como de ahorro de tiempo y de espacio.

La matemática lleva a cabo siempre y en todo lugar un principio de economía: la búsqueda del recorrido mínimo para obtener un fin preestablecido. Un principio que no está necesariamente dictado por el criterio de utilidad, y que se conforma ante todo a una estrategia de significación teórica, que tiende a comprimir la máxima información en un mínimo esfuerzo de cálculo. Si se quiere predecir la evolución de un fenómeno, hay que evitar que la información contenida en los modelos matemáticos se traduzca en una polvareda aritmética sin sentido: las listas de números que se obtienen al final del proceso deben reflejar, a un nivel inferior de información, en el tiempo y en el espacio del ordenador, lo que

el modelo pretendía representar. La eficacia de la matemática para la representación del mundo físico se transmite a lo largo de todo el complejo y accidentado recorrido intermedio entre el modelo teórico y los números efectivamente calculados. A lo largo de dicho recorrido, se puede perder también el contacto directo con la naturaleza del fenómeno físico cuyo modelo inicial simula la evolución, porque la eficiencia del cálculo acaba basándose finalmente en la matemática pura, en teoremas y estructuras matemáticas que tienen muy poco que ver con la física, y cuya eficacia no tiene por ello unos efectos menos milagrosos que la inicial conformidad del modelo teórico a la naturaleza del fenómeno. Esto vale sobre todo para las matrices: si, como suele suceder, un modelo diferencial se aproxima con un sistema de ecuaciones lineales, la matriz de los coeficientes del sistema tiene una estructura que refleja la del modelo, pero su resolución puede implicar a matrices de estructura completamente diferente.

Así escribían Herman Goldstine y John von Neumann en 1946 a propósito del cálculo digital a gran escala que empezaba a perfilarse en los años cuarenta, y en particular sobre la resolución matemática de problemas de dinámica de fluidos por medio de modelos diferenciales:

> Es importante evitar un malentendido en este punto. Podemos sentirnos tentados de calificar estos problemas como problemas del ámbito de la física, más que de la matemática aplicada o incluso de la matemática pura. Querríamos destacar que estamos convencidos de que tal interpretación es del todo equivocada. Es completamente cierto que todos estos fenómenos son importantes para el físico y que los tiene muy en cuenta. Pero esto no debe hacer olvidar la importancia que tienen para el matemático. De hecho, creemos que es preciso atribuirles el máximo significado también desde el punto de vista puramente matemático.[183]

Sin embargo, el cálculo debe ser comprendido hasta en los últimos detalles. También las grandes síntesis teóricas de la filosofía han intentado, con arreglo a un principio de realidad, una concreta conexión con las

operaciones más elementales del cálculo. En este sentido, la matemática está obligada a ser reduccionista, pero el reduccionismo no debe hacer olvidar que todos los pasos intermedios entre el modelo y los números efectivamente calculados solo son posibles gracias a la intervención de conceptos teóricos y de estructuras matemáticas relativamente abstractas. En una idea extensa del concepto de realidad, la estructura más abstracta es tan importante como la lista de cifras, de por sí ininteligible, que un ordenador imprime materialmente al final de un proceso de cálculo: una es reflejo de la otra, una es descifrada por medio de la otra. La matemática, por tanto, no es solo una abstracción. Pero precisamente por su calidad abstracta y por sus contenidos teóricos, es un fundamento de la realidad de este mundo y de la forma en la que nos aventuramos a intervenir para modificarlo.

La proximidad de la matemática a lo que calificamos como real y efectivo recuerda aquel carácter de potencia que los griegos asignaban a sus operaciones más simples, como construir un cuadrado sobre una línea, y que Platón denominó *dýnamis*. Ya entonces la potencia (*dýnamis*) era capaz de producir, además de los templos y de los altares en crecimiento, también los más sofisticados artefactos mecánicos, las catapultas y otras máquinas de guerra. Por tanto, era fatal que la *dýnamis* platónica pudiera transmutarse en efectiva potencia científica y técnica, con todos los peligros que ahora podemos imaginar y detectar. Una clara señal de la afinidad entre realidad y potencia, extendida a todo el ámbito de la naturaleza, la encontramos, en una época ya profundamente marcada por el ímpetu prometeico de la ciencia, en la *Ética* de Spinoza: «La naturaleza es siempre la misma, y también su virtud y potencia de actuar en todas partes». Y finalmente: «La potencia o esfuerzo de cualquier cosa [...] no es más que la esencia dada, es decir, actual, de la cosa en sí» (*Ética*, III, prefacio y proposición 7, demostración).

[165] El vector *w* tiene como elemento de lugar *i* la suma, al variar *k*, de los productos $aik \times vk$, donde *vk* es el elemento de lugar *k* del vector *v*. Análogamente, el producto de dos matrices cuadradas *A* y *B* de *n* filas y *n* columnas es la matriz cuadrada *C*, con las mismas dimensiones de *A* y *B* y cuyo elemento *cij* es la suma, al variar *k*, de todos los productos $aik \times bkj$. Si el producto de dos matrices *A* y *B* es la matriz idéntica *I*, entonces *B* es la inversa de *A*, *A* se dice invertible, y se escribe $B = A^{-1}$. El vector solución *x* de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ con matriz de los coeficientes A invertible es igual al producto de A^{-1} por el vector *b*. Véase más arriba, nota 109.

[166] V. Y. Pan, «Complexity of parallel matrix computations», en *Theoretical Computer Science*, LIV, 1987.

[167] G. Strang, «Wavelets», en *American Scientist*, LXXXII, 1994.

[168] Véase J. H. Wilkinson, «Some Comments from a Numerical Analyst» (1970 Turing Lecture), en *Journal of the Association for Computing Machinery*, XVIII, 1971. Sobre las fases iniciales del desarrollo del cálculo matricial y sobre el papel del libro de Whittaker y Robinson, véase O. Taussky, «How I became a torchbearer for matrix theory», en *The American Mathematical Monthly*, XCV, 1988. Para las primeras comunicaciones sobre la ineficiencia del método de Cramer, véase G. E. Forsythe, «Solving linear algebraic equations can be interesting», en *Bulletin of the American Mathematical Society*, LIX, 1953.

[169] D. Hilbert, «Ein beitrag zur theorie des legendre'schen polynoms», en *Acta Mathematica*, XVIII, 1894.

[170] La expresión del error contiene potencias de la variable *x* que, para valores de *x* comprendidos entre 0 y 1, están cerca de ser linealmente dependientes. Por este motivo, la estrategia de minimizar el error se reduce a un sistema de ecuaciones lineales identificado por una matriz *H* cuyas filas están cerca de ser linealmente dependientes, con la consecuencia de que el determinante de *H* está próximo a cero, una señal del mal condicionamiento de *H*. De hecho, el recíproco del índice de condicionamiento de una matriz *H* es igual a la mínima distancia de la matriz *H* del conjunto de las matrices de determinante nulo. Por tanto, el índice de condicionamiento es mucho mayor cuanto más pequeña es esta distancia. Véase J. W. Demmel, «On condition numbers and the distance to the nearest ill-posed problem», en *Numerische Mathematik*, LI, 1987.

[171] La matriz está recogida en la anterior forma explícita en G. E. Forsythe, «Pitfalls in computation, or why a math book isn't enough», en *The American Mathematical Monthly*, LXXVII, 1970. Véase también G. E. Forsythe, C. B. Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N. J.), 1967.

[172] Véase la nota 165, para las expresiones que definen el producto de una matriz por un vector. La solución del sistema de 6 ecuaciones se obtiene multiplicando la matriz H^{-1} de seis filas y 6 columnas por el vector *b*, de lo que resulta un vector solución *x* cuyo quinto elemento *x*5 viene dado por una expresión que contiene el término 4410000*b*5, donde *b*5 es el quinto elemento del vector *b*. Si *b*5 sufre una pequeña variación, con incremento positivo, digamos, igual a 10^{-6}, en lugar de 4410000*b5* encontramos $4410000(b5 + 10^{-6})$; es decir, *x*5 sufre, solo por la perturbación 10^{-6}, una

variación igual a 4,41. Una amplificación análoga del error puede producirse, naturalmente, para cualquier elemento bastante elevado de la inversa de *H*.

[173] Para más detalles, véase N. J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, SIAM, Filadelfia, 1996, p. 177.

[174] Una matriz *A* simétrica (es decir, tal que $aij = aji$) de elementos reales se dice *definida positiva* si $x^T Ax > 0$ para todo vector no nulo *x* sobre los reales. La matriz *A* es definida positiva si todos sus autovalores son (reales y) positivos.

[175] Más exactamente, si *X* es la inversa calculada de *A*, la distancia entre *AX* y la matriz identidad *I* no supera el valor 14,24 $(\lambda max/\lambda min)n^2\beta^{-s}$, donde λmax y λmin son, respectivamente, el autovalor máximo y el autovalor mínimo de *A*, y el cálculo se efectúa en aritmética en coma flotante con números de *s* cifras significativas y base de representación igual a β.

[176] J. H. Wilkinson, «Modern error analysis», en *SIAM Review*, XIII, 1971, p. 550. Wilkinson recuerda también la valiosa aportación al análisis del error por parte de Wallace Givens, que fue el primero en concebir, en 1954, un análisis *retrospectivo* del error, consistente en *reflejar* sobre la matriz los errores acumulados en el cálculo: el algoritmo aproximado es concebido como un algoritmo que invierte exactamente no la matriz *A*, sino una matriz $A + \Delta A$, es decir, una matriz perturbada por un error ΔA.

[177] A. M. Turing, *Rounding-off errors in matrix processes*, cit.

[178] También la eficiencia de conocidos métodos iterativos, y en concreto la velocidad de convergencia a la solución, depende en muchos casos del índice de condicionamiento μ.

[179] La *norma euclidiana* de *A*, llamada también *norma espectral*, porque si A es simétrica y definida positiva coincide con su radio espectral, es decir, con su máximo autovalor, es menor o igual que la norma de Frobenius.

[180] *Puede* ser y no *es* necesariamente. El error de por sí es incognoscible, solo podemos establecer unos límites. Pero si estos límites son compatibles con un error elevado, toda certeza sobre la fiabilidad del proceso computacional disminuye. Sin embargo, existen métodos de *condicionamiento*, técnicas de intervención en la matriz para modificar la distribución de los autovalores. Sobre estas técnicas hay ahora abundante literatura.

[181] Véase más arriba, nota 25.

[182] A. A. Markov Jr., *The theory of algorithms*, cit., p. 1.

[183] H. H. Goldstine, J. von Neumann, *On the principles of large-scale computing machines*, en John von Neumann Collected Works, a cargo de a cargo de A. H. Taub, Pergamon Press, Oxford, vol. V, 1963, p. 3.

17

Crisis de los fundamentos y crecimiento de la complejidad

No solo crecen los números, sino que también aumenta la complejidad del cálculo. Y este riesgo puede extenderse también a los procedimientos más conocidos y probados, algo de lo que se resiente no solo el algoritmo de Cramer. Si se utiliza el clásico método de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones lineales o para calcular el *determinante* de una matriz,[184] puede producirse un defecto de eficiencia debido al aumento de la montaña de cálculos: en el caso del determinante, el número de operaciones *aritméticas* es una función polinómica de dimensión *n*, pero no siempre es fácil controlar que también continúe siendo polinomial el número de operaciones *binarias*, es decir, de operaciones elementales sobre las cifras de la representación en base 2 de los números que intervienen en el cálculo. Este número puede convertirse en exponencial.[185]

El estudio de la complejidad computacional, es decir, de los criterios para medir la dificultad para calcular una función, es uno de los filones más importantes de la ciencia del cálculo desde los años cincuenta. Al aumentar la dimensión, la dificultad de resolver problemas relativamente elementales puede aumentar de forma exponencial, a causa de una incontrolable explosión combinatoria. Es el caso de los llamados problemas NP-completos (resolubles en tiempo polinómico con una máquina no determinística): es relativamente fácil *comprobar* si una solución dada propuesta por cualquiera de estos problemas lo es verdaderamente, pero la

búsqueda efectiva de una solución exige, según los conocimientos actuales, un número de operaciones al menos exponencial.

La teoría de la complejidad contribuyó también a la eliminación de la crisis de los fundamentos que había amenazado a la matemática en las primeras décadas del siglo XX, abriendo nuevas perspectivas de investigación en sectores que habían sido, hasta los años cuarenta, completamente ignorados. Dicha eliminación pudo realizarse gracias a la afinidad de los problemas abordados, así como a las técnicas necesarias para aclararlos: la pregunta central que había impulsado la investigación de los fundamentos, desde la célebre lista de veintitrés problemas propuesta por Hilbert en París en 1900, era «si cualquier problema matemático puede ser resuelto», tanto en sentido positivo (con el cálculo efectivo de la solución) como en sentido negativo (demostrando que no existe un algoritmo que calcule su solución). La pregunta central que concierne a la complejidad del cálculo es «si un problema matemático puede ser resuelto en tiempo polinomial», es decir, con un número de operaciones iguales a una función polinómica de la dimensión del problema, y por tanto compatible, en principio, con el tiempo y el espacio de memoria de un ordenador.

En una carta escrita desde Princenton y fechada en 1956, Gödel proponía a Von Neumann un interrogante matemático destinado a convertirse en uno de los problemas fundamentales —todavía no resueltos— de la ciencia del cálculo: se puede construir fácilmente, argumentaba Gödel, una máquina de Turing que, para cada fórmula F del cálculo de los predicados del primer orden y para cada número natural n establecido, permita decidir si hay una demostración de F de longitud n (si la longitud n es el número de símbolos, basta explicitar la lista de todas las demostraciones de longitud n realizables por la máquina y controlar si entre ellas se encuentra la demostración de F). Ahora bien, si p es el número de pasos (dependiente de F y de n) que la máquina requiere para este fin, y si $P(n)$ es el máximo entre los números p al variar F, ¿a qué velocidad crece $P(n)$, al aumentar n, para una máquina óptima?

Gödel planteaba así una cuestión que no se refería a la pura resolubilidad algorítmica, sino a la complejidad computacional, concretamente al grado de dificultad del cálculo. Un comentario de Juris Hartmanis a la carta aclara muy bien su importancia estratégica dentro de la investigación sobre los fundamentos de la matemática. A partir de los resultados de Gödel, explica Hartmanis, sabemos que en la matemática hay tanta abundancia de fórmulas y de problemas que es imposible axiomatizarla de forma coherente y completa. De los resultados de Turing y de Church también aprendemos que, para sistemas formales suficientemente complejos, la cuestión general de qué aserciones son o no demostrables no se puede decidir mediante un proceso algorítmico. En su carta, Gödel planteaba ahora la siguiente cuestión que seguía concerniendo a los fundamentos de la matemática, pero ahora en términos de «crecimiento de la complejidad de cálculo»: al aumentar *n*, ¿hasta qué punto es difícil decidir mediante un procedimiento si, en un sistema formal, una aserción admite una demostración de longitud *n*?[186]

Gödel, que había echado por tierra el sueño de una matemática axiomatizada, aventuraba ahora, irónicamente, la hipótesis más optimista: que la complejidad del problema que se le planteó a Von Neumann pudiera ser lineal o, en todo caso, cuadrática. Ahora sabemos que esto pertenece a la clase de problemas NP-completos. El estudio de esta ha requerido técnicas completamente afines a las utilizadas para las cuestiones de pura resolubilidad teórica, que habían permitido responder (negativamente) también a algunas de las cuestiones planteadas por Hilbert en la célebre conferencia dictada en 1900 en París.

Las cuestiones más teóricas sobre la complejidad computacional se entrelazaron después, para varios aspectos, con el grado de eficiencia de los algoritmos numéricos destinados a resolver problemas de aplicación de diferente naturaleza. Los modos de crecimiento de las dimensiones, del número de operaciones, de los números efectivamente calculados o bien del error algorítmico o debido a mal condicionamiento, son en todos los casos un criterio para establecer, si no la realidad, sí la efectiva existencia de las soluciones. Pero las nuevas cuestiones, también fundamentales y en parte

no resueltas, no han desencadenado una crisis análoga a la de los años veinte del siglo pasado. La urgencia parece haberse trasladado ahora a problemas que conciernen a la informática teórica y a las aplicaciones de la matemática computacional, es decir, una ciencia global del cálculo lo suficientemente empírica y flexible como para tolerar imperfecciones o incertidumbres de recorrido.

La eficiencia de un algoritmo depende sobre todo de dos elementos: la complejidad y la estabilidad, que es la sensibilidad global respecto a los errores en las operaciones. Hablar de la solución de un problema matemático es algo justo e inevitable, pero en la mayoría de los casos esta solución no se conoce en absoluto y el cálculo de su fórmula analítica, supuestamente existente, conllevaría errores de aproximación mayores de los debidos a una sustitución del modelo inicial por un modelo más simple. Sustituyendo el modelo diferencial o integral por un modelo aritmético, la solución se calcula únicamente con las operaciones fundamentales sobre los números: adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones. Sin embargo, el conocimiento que se puede tener de ellos es siempre aproximado, y los resultados calculados pueden ser completamente inesperados. La conclusión es que ese grado de certeza inherente a la matemática elemental de los números, sobre cuyo modelo Hilbert construyó las técnicas (metamatemáticas) destinadas a justificar el uso matemático del infinito, no era totalmente defendible. Incluso una sola adición, realizada por un ordenador, puede generar números carentes de sentido.[187]

Una tipología del error concierne a los procesos computacionales de tipo iterativo: con aplicaciones repetidas de un operador se genera una sucesión de números cuya distancia (interpretable como error) de la solución tiende a cero. De parecidos procesos de cálculo, conocidos desde la más remota Antigüedad, derivaron los conceptos analíticos de límite y de convergencia de una sucesión, y algunas demostraciones de convergencia se siguen basando no tanto en argumentaciones lógicas como en la existencia y en las propiedades de los propios procesos de cálculo. Pero ¿somos efectivamente capaces, con un procedimiento iterativo, de acercarnos a la solución hasta reducir la distancia a un valor arbitrariamente pequeño? Los matemáticos

no se han planteado este problema durante mucho tiempo, y todavía hoy se oye explicar, con las mismas palabras de Cauchy, cómo pueden calcularse, para una raíz de una ecuación algebraica, «valores numéricos aproximados *arbitrariamente* cercanos».[188] Sin embargo, este acercamiento indefinido a la solución vale solo en principio, y el error de aproximación *no* puede convertirse arbitrariamente en pequeño. Los errores de redondeo crean fatalmente, alrededor de la raíz de la ecuación, un *intervalo de incertidumbre* que despoja de significado a los valores numéricos calculados más allá de un cierto límite de aproximación: un buen algoritmo podrá suministrar, después de cierto número de pasos, un valor dentro de dicho intervalo, pero no tiene sentido tratar de mejorar ese valor calculando uno sucesivo dentro del mismo intervalo.

Para explicar en qué consiste el continuo, Poincaré, como ya hemos recordado, aconsejaba considerar dos líneas que se cruzan. Podemos imaginarlas dibujadas en el plano cartesiano. Nuestra imaginación tiende a figurárselas como dos cintas finas que, al cruzarse, tienen una parte común. El matemático da un paso más: sin renunciar a la sugerencia de la imaginación, trata de configurar una línea sin anchura y un punto sin tamaño. Entonces se le ocurre pensar en la línea como el *límite* al que tiende una cinta al reducirse progresivamente su anchura. El límite al que tiende el área de intersección de las dos cintas al tender a cero su anchura será entonces un punto. Esta es la razón, concluía Poincaré, de que estemos dispuestos a sostener, con arreglo a una verdad intuitiva, que las líneas que se cruzan *deben* tener un punto en común.

¿Qué sucede si la abscisa α del punto de intersección P de las curvas no corresponde a un número racional? Con la estrategia sugerida por las definiciones teóricas del campo de los reales tratamos de calcular una secuencia de intervalos de longitud decreciente, cada uno de ellos contenido en el anterior, que contienen a α. Pero si utilizamos los algoritmos numéricos más conocidos destinados a identificar, paso por paso, estos intervalos, nos daremos cuenta de que no es posible reducir su longitud más allá de un cierto límite. La razón de esta imposibilidad se encuentra en la

necesidad de cortar o redondear las secuencias de cifras de los números efectivamente calculados.

Si las dos curvas están definidas en el plano cartesiano por dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, la ecuación que hay que resolver numéricamente es $h(x) = 0$, donde la función h es definida por la diferencia, para cada x, entre $f(x)$ y $g(x)$, o sea, $h(x) = f(x) - g(x)$. La existencia teórica del número α que anula la función h está garantizada por un célebre teorema de Bernhard Bolzano: si en un intervalo cerrado $[a, b]$ con extremos a y b, o sea, en un conjunto de números reales x para el que $a \leq x \leq b$, una función continua es positiva para algunos valores de x y negativa para otros, entonces existe un número α, comprendido entre a y b, para el que la función se anula (en la Figura 9, la función h es positiva en a y negativa en b).

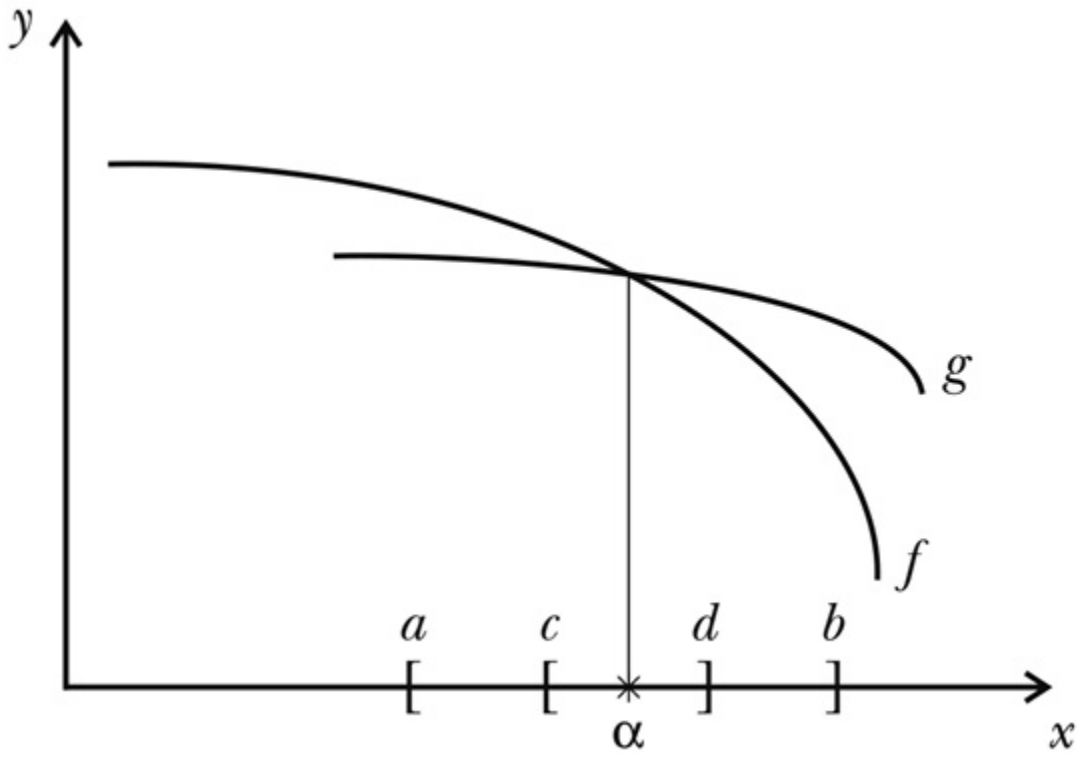


Figura 9

Las estrategias para calcular α utilizan con frecuencia este teorema: se calculan iterativamente intervalos con extremos cada vez más cercanos tales que la función h en cada uno de ellos cambie de signo. La secuencia

indefinida de estos intervalos define el número α, que existe así, en principio, en el cuerpo de los números reales. Pero ¿qué se puede decir del cálculo efectivo de los números con los que aproximamos α? Este cálculo implica, normalmente, la valoración de la función *h* en diferentes puntos, para conocer cuándo es positiva o negativa. Pero, a causa de los errores de redondeo, no calculamos $h(x)$, sino una función $t(x) = h(x) + e(x)$, donde $e(x)$ es una perturbación que no supera en valor absoluto un cierto número positivo ε. Ahora bien, si $[c, d]$ es el máximo intervalo circular alrededor de α, dentro del cual la función *h* es en valor absoluto menor o igual a ε, no es difícil demostrar que si $t(x)$ es positiva (o negativa) en ese intervalo, *no* lo es necesariamente también $h(x)$.[189] Desde el momento en el que la *x* calculada cae en el intervalo $[c, d]$, nuestros cálculos para conocer si la función *h* adopta signos diferentes no llevan a ninguna conclusión. Esto implica que no es posible calcular un intervalo menor que $[c, d]$ que contenga en su interior la solución *a* de la ecuación $h(x) = 0$, o sea, la abscisa de la intersección de las dos curvas. De α se ignora la ubicación dentro de un intervalo que no puede ser posteriormente reducido.

Análogos razonamientos valen naturalmente para problemas más complejos que el descrito, como la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales o un problema de mínimo. Por lo tanto, la nube de indeterminación que rodea regularmente la solución de un problema hace problemática su misma existencia. Todo lo que sabemos de su solución está en el algoritmo delegado a aproximarla, y se sobreentiende que ese algoritmo debe poder dar, de la solución, una información adecuada a los fines para los cuales se la calcula. En cierto sentido, la solución *es* el mismo algoritmo, pero esta conclusión requiere también la *eficiencia* del algoritmo, medida en términos de estabilidad (sensibilidad respecto a los errores) y de complejidad computacional. Así pues, la constructividad algorítmica y la eficiencia deberían incluirse entre los requisitos necesarios para crear una ontología del número. La eficiencia es un criterio de la matemática computacional y del cálculo automático a gran escala que completa la pura idea de efectividad introducida en el ámbito de la calculabilidad algorítmica.

Esta conclusión parece desplazar la realidad de los números desde un conjunto de definiciones teóricas a una idea de concreta eficiencia algorítmica. Sin embargo, para que un algoritmo sea eficiente, es necesario introducir en el cálculo más concreto entes matemáticos ligados a teoremas y a estructuras matemáticas relativamente abstractas, a menudo ajenas al modelo con el que se pretende simular un fenómeno. Por ejemplo, las matrices que intervienen en un procedimiento —con el único objetivo de simplificar los cálculos— tienen normalmente una estructura especial, definible exactamente, en ciertos casos, mediante las propiedades de un grupo algebraico. Solo porque se trata de matrices con *estructura*, y no de matrices genéricas, se consiguen completar cálculos de lo contrario imposibles. Por lo tanto, la materialidad de la eficiencia tiene como presupuesto la existencia de entes matemáticos abstractos. Ya Goldstine y Von Neumann, como hemos recordado, observaban que el cálculo digital se basa en buena medida en la matemática pura.

La tesis, ya sostenida en el pasado, de que los números tienen el mismo estatus ontológico siempre que sean definidos de forma coherente ya no es defendible, pero también es cierto que su existencia concreta depende de un conocimiento teórico que establece las condiciones y los límites de su calculabilidad.

[184] El determinante de una matriz *A* es la función polinómica de los elementos de *A* de los que dependen tanto la existencia y la unicidad de la solución del sistema de ecuaciones, matriz de los coeficientes iguales a *A*, como el número de condicionamiento de *A*. El determinante es igual al producto de los autovalores de *A*.

[185] Este posible inconveniente fue señalado, quizá por primera vez, por J. Edmonds, «Systems of distinct representatives and linear algebra», en *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, LXXI B, 1967. Véase también L. Lovász, «Algorithmic Aspects of Some Notions in

Classical Mathematics», en *Mathematics and Computer Science*, a cargo de J. W. de Bakker, M. Hazewinkel, J. K. Lenstra, North-Holland, Ámsterdam, 1986.

[186] Cfr. J. Hartmanis, «Gödel, von Neumann and the P=?NP Problem», en *The Structural Complexity Column*, 1989. Hartmanis se refiere precisamente a los tres problemas fundacionales: la incompletitud, la indecibilidad y la complejidad, y explica cómo esta última hereda la pregunta fundamental de qué es lo que admite o no, en matemática, una solución.

[187] Ni siquiera el cálculo de un simple polinomio cuadrático $p(x)$ carece de riesgo. Si se escribe la fórmula de la simple parábola de ecuación $y = p(x) = 1 + (x - 5555{,}5)^2$ en la forma $p(x) = 30863581{,}25 - 11111x + x^2$, calculando $p(5555)$ y $p(5554{,}5)$ en aritmética de máquina con seis cifras significativas se obtienen, respectivamente, los números 0 y 100. En otras palabras, una pequeña perturbación en x puede reflejarse en una elevada perturbación en $p(x)$. El ejemplo está tomado de J. R. Rice, *Numerical Methods, Software, and Analysis*, McGrawHill, Nueva York, 1983, p. 60.

[188] A.-L. Cauchy, *Cours d'Analyse de l'École Royale Poly technique. 1re Partie. Analyse Algébrique*, Debure, París, 1821, p. 463. El entrecomillado es mío.

[189] Si x pertenece al intervalo $[c, d]$, entonces $h(x)$ es el valor absoluto menor o igual a ε. Si en el mismo intervalo $t(x)$ es positiva, no podemos deducir que lo sea también $h(x)$, porque la desigualdad $h(x) + e(x) > 0$ es compatible con la desigualdad $h(x) < 0$. Es distinto si x no pertenece a $[c, d]$. En tal caso, $h(x)$ es en valor absoluto mayor que ε, y si $t(x)$ es positiva, también $h(x)$ es positiva. De hecho, si fuera $h(x) < 0$ debería ser $h(x) < -\varepsilon$, y por lo tanto también $h(x) + e(x) < 0$, una contradicción.

18

Verum et factum

Verum et factum convertuntur. Se trata de una fórmula de la que Giambattista Vico encontraba huellas significativas en la literatura latina, concretamente en Terencio y en Plauto, y que hoy puede servir todavía como premisa a las epistemologías constructivistas. La realidad de algo depende del *hacer*, de llevarla efectivamente a cabo con la acción. La solución de un problema matemático depende, pues, de la posibilidad de calcularla de forma eficiente en el espacio y el tiempo físicos de una ejecución automática, que es la única estrategia posible a causa de la elevada dimensión de los problemas. No parece haber nada más real que un proceso que, en un número finito de pasos, realiza los cálculos necesarios con arreglo a unos datos asignados. Pero ¿la realidad de los entes matemáticos se sintetiza verdaderamente, de forma exhaustiva, en esta conclusión?

Hay que recordar que todo el análisis y su función de modelo para una descripción del mundo físico se basan en las propiedades métricas del campo de los números reales definidos por Cantor y por Dedekind. Dicho campo de números, que expresa aritméticamente el concepto de continuidad, posee entre sus peculiares propiedades la de la *completitud*. Eso significa que cualquier secuencia *fundamental* en los reales converge en un número real, es decir, admite un límite que no está fuera, sino que pertenece al campo de los números reales. El campo de los números racionales no es completo porque hay sucesiones de racionales que admiten

un límite que no es racional: es el caso de los números laterales y diagonales, cuyas relaciones convergen en la raíz cuadrada de 2, que no es racional. Ahora bien, a menudo se puede demostrar la *existencia* de la solución de un problema matemático, como una ecuación algebraica, una ecuación diferencial o integral, recurriendo a la propiedad de completitud: se calcula una secuencia de valores que aproximan la solución y se demuestra que tal secuencia es *fundamental*. Para la propiedad de completitud el límite de esta secuencia *existe* en el campo de los números reales.

Hasta aquí solo se admite la existencia de la solución, pero para hacerlo se utiliza una secuencia de valores que la aproximan y que son efectivamente calculables. La demostración de existencia de la solución se sirve de un algoritmo que calcula sus sucesivas aproximaciones. Así pues, la propiedad teórica de completitud, que caracteriza, junto a otras, el continuo aritmético, se aplica a problemas físicos descritos por modelos diferenciales cuya solución se busca mediante algoritmos que deben cumplir una precisa propiedad de convergencia. La ejecución de los cálculos debe ser automática, a causa de la elevada dimensión de los problemas, hasta la evaluación final de interminables listas de números. Tales listas, como los programas delegados para calcularlas, pueden no ser, de por sí, inteligibles; sin embargo, contienen, en términos de puras secuencias de cifras, la información transmitida por el modelo y, por lo tanto, por el mismo fenómeno físico que este pretende simular.

El propio cálculo se convierte, en última instancia, en un proceso físico, pero es difícil separarlo de los presupuestos teóricos, puramente matemáticos, que lo hacen posible. La existencia *efectiva* de la solución de un problema se encomienda ciertamente a la *eficiencia* de un algoritmo, pero si se trata de captar la realidad del ente matemático, es difícil separar ámbitos de razonamiento y de cálculo que se cruzan y se apoyan entre sí, hasta formar una teoría articulada, de teoremas, demostraciones y algoritmos, por la que esa realidad es globalmente sustentada y prácticamente impuesta. Como escribe Simone Weil, «lo real es lo que se nos impone. La demostración se nos impone más que la sensación. Pero

comporta una parte de convención. Es necesario captar lo no convencional en la matemática».[190] En efecto, en el procedimiento que desde el modelo matemático llega hasta el cálculo digital hay muy poco de convencional: la naturaleza del acontecimiento físico se transmite necesariamente en la estructura de las ecuaciones y de los entes matemáticos destinados a resolverlos, hasta imprimirse en las últimas listas de números calculados. Al final, lo que se ha definido como «la irracional eficacia de la matemática en las ciencias naturales»[191] se presenta como la consecuencia de una compleja y articulada combinación de propiedades y de circunstancias que atenúan sensiblemente la impresión inicial de accidentalidad de las posibles conexiones entre los conceptos abstractos de la matemática y el mundo físico.

El *factum* está al final del proceso de modernización y se materializa en los números efectivamente calculados, situados en la memoria de un ordenador; sin embargo, es también un presupuesto, histórico y conceptual, de la teoría del continuo aritmético que permite la construcción y el estudio del modelo. El concepto de sección y el continuo aritmético de Dedekind son la consecuencia natural de un hecho primordial que se expresa en una construcción algorítmica: «¿No será verdad que el concepto de partición [de *sección* según Dedekind] está precedido por un hecho puramente algorítmico, es decir, por la necesidad de justificar y legitimar ciertos procesos algorítmicos, como el de la aproximación por exceso y por defecto de $\sqrt{2}$, que se traducen precisamente en la construcción de clases compuestas de infinitos números discretos?».[192]

Se puede sostener, hasta cierto punto, que *verum et factum convertuntur*, lo verdadero coincide al final con el hecho, pero también hay que tener en cuenta que es arduo enunciar una definición precisa de «hecho», o de la «efectividad», que debería constituir la esencia de un proceso computacional. Además, no es inadmisible la tesis de que «el ámbito de la realidad supera infinitamente el del hecho»,[193] dependiendo de un conjunto de circunstancias por las cuales el hecho puede verificarse de cierta manera y no de otra. El hecho como tal permanece indiferente respecto a la búsqueda de su fundamento. Es este último el que contiene virtualmente,

como principio activo y productivo, lo que existe en acto. Como explicaba Tomás de Aquino, antes de lo que existe en potencia debe de haber algo que existe en acto, porque la potencia no se resuelve en acto si no es por algo que ya existe en acto.[194]

[190] S. Weil, *Cahiers*, en *Œeuvres complètes*, vol. VI, tomo III, cit., p. 90 (trad. it. cit., vol. III, p. 75).

[191] E. P. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, cit.

[192] A.-L. Cauchy, *Cours d'Analyse de l'École Royale Poly technique. 1re Partie. Analyse Algébrique*, Debure, París, 1821, p. 463. El entrecomillado es mío.

[193] A. Capelli, «Saggio sulla introduzione dei numeri irrazionali col metodo delle classi contigue», en *Giornale di Matematiche*, XXXV, 1897, p. 210.

[194] S. Weil, *Cahiers*, en *Œuvres complètes*, vol. VI, tomo II, cit., p. 352 (trad. it. cit., vol. II, p. 181).

19

Recursión e invariancia

El fenómeno del crecimiento no es marginal, porque interviene en la estructura más íntima del algoritmo. El modo de crecimiento es decisivo para la eficiencia. Cuando se explica que un algoritmo funciona de forma recursiva, se quiere decir más o menos lo siguiente: el problema que el algoritmo está destinado a resolver (por ejemplo, el producto de dos números de 16 cifras cada uno) se divide en problemas de la misma naturaleza, pero de dimensión inferior (productos de números de 8 cifras), y estos se dividen a su vez en problemas análogos menores (productos de números de una sola cifra). A partir de estos últimos, mediante un cálculo iterativo, se remonta en dirección opuesta hasta resolver el problema planteado inicialmente. Esta forma de organizar el cálculo recursivo, a través de una jerarquía de problemas de la misma naturaleza pero de dimensión decreciente, se llama también *divide et impera*, del antiguo lema latino. Pero el criterio de división no es, de por sí, siempre eficiente. Lo importante es la ley que regula la disminución y el sucesivo crecimiento de las dimensiones. El método de Cramer, que simplifica el cálculo del determinante de una matriz de dimensión $n-1$, es totalmente ineficiente. Una gran variedad de algoritmos utiliza, en cambio, divisiones dicotómicas, es decir, el inicial problema de dimensión n se divide en problemas de dimensión $n/2$ (suponiendo que n sea igual). De esta forma, la dimensión del cálculo sigue una progresión de sucesivas potencias de 2: el crecimiento de la dimensión, que se remonta desde los problemas más elementales al

problema inicial, se duplica cada vez. Por un lado, el algoritmo recuerda al árbol genealógico de la Enéada de los teólogos de Heliópolis, en el antiguo Egipto, como se halla descrito en el sarcófago de Petamon (n. 1160) en el museo de El Cairo:

METERESPACIO

Soy el Uno que se transforma en Dos,
soy el Dos que se transforma en Cuatro,
soy el Cuatro que se transforma en Ocho,
y después de eso, soy el Uno.

La división se efectuaba también en Heliópolis para potencias de 2, o sea, $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, y, después de haberla repetido cuantas veces era necesario, se recuperaba el uno con un recorrido en dirección opuesta, exactamente como en el procedimiento recursivo. De hecho, después de la reducción a un núcleo inicial de pequeña dimensión, el cálculo recursivo consiste en un aumento progresivo de la dimensión que hace volver a obtener la solución del problema, es decir, el cálculo de la función asignada. El proceso vuelve a comenzar a partir de un pequeño núcleo inicial y se convierte en un crecimiento que mantiene inalterada la forma. En Egipto, no solo la fórmula teológica se valía, metafóricamente, de una idea de crecimiento progresivo para sucesivas potencias de 2. Las fórmulas aritméticas para calcular el producto de dos números se basaban regularmente en un criterio análogo de crecimiento.[195]

El crecimiento de los números puede realizarse también de otros modos, es decir, no por sucesivas potencias de 2, por ejemplo, según la célebre serie de Fibonacci, en la que cada número diferente de uno es igual a la suma de los dos números anteriores. Dividiendo un problema según el criterio de Fibonacci, o de otras sucesiones análogas, se pueden obtener ventajas computacionales, como se demuestra en el caso del cálculo en paralelo (donde varias operaciones son realizadas simultáneamente) de una función racional (el cociente de dos polinomios). El desarrollo del cálculo puede ser descrito mediante un gráfico que se despliega, y en la forma del despliegue del gráfico se puede identificar la complejidad computacional. El criterio

del crecimiento puede diferir de un caso a otro, pero de todas formas es decisivo para definir el recorrido más rápido que nos lleva al resultado final del cálculo.

La iteración y la búsqueda de la invariancia son los ingredientes necesarios, la regla de oro de la computación. Un ejemplo de ellas se encuentra también en los cálculos que utilizan los motores de búsqueda en red. Cada página o documento de la inmensa telaraña de información a escala planetaria se representa como un nodo i de un gráfico directo de enormes dimensiones, en el que el número de nodos es elevadísimo, al que se puede asociar una matriz L de dimensiones equivalentes, con millones de filas y de columnas (aunque se trate de matrices extendidas, es decir, con muchos ceros). La matriz L caracteriza al gráfico, en el sentido de que el elemento l_{ij} es igual a 1 si hay conexión entre el nodo i y el nodo j, y l_{ij} es igual a 0 en caso contrario. Para valorar la importancia de un nodo del gráfico, se tiene en cuenta el número de exigencias que convergen en el tiempo en ese nodo. Este criterio se puede expresar, entonces, en un cálculo iterativo, estableciendo un vector x_0 de estimaciones conjeturales iniciales de la importancia de los nodos, y actualizándolo repetidamente con un nuevo vector x por medio de combinaciones lineales de valores de importancia de los nodos conectados, aquellos que remiten al nodo considerado y aquellos a los que el propio nodo puede remitir. La importancia del nodo, es decir, del documento web, depende de la entidad de las conexiones. La actualización se expresa, así, en el cálculo iterativo, aproximado, del autovector x correspondiente al autovalor máximo de una matriz A que depende de L (A sustituye a L con el fin de hacer convergente el cálculo iterativo). Como la estructura de A permite establecer que su autovalor máximo es igual a 1, se tiene que $Ax = x$, es decir, x es un *punto fijo* de A, un vector que permanece invariable, tanto en dirección como en longitud, como consecuencia de la aplicación del operador lineal A. Por lo tanto, un criterio de invariancia preside el cálculo iterativo de la solución del problema de la Red, que consiste en asignar la mayor o menor

importancia de una página para elaborar la respuesta a una pregunta genérica.

La teoría de las matrices que intervienen en los cálculos se debe principalmente al genio de Oskar Perron, que la elaboró a comienzos del siglo pasado por motivos completamente ajenos a los que hoy la han hecho famosa a causa de sus numerosas aplicaciones a la economía, al crecimiento de las poblaciones y a los modelos de fisión nuclear. Por ironías de la historia, en una carta de 1972 a un alumno suyo, Perron, totalmente desconocedor de las futuras aplicaciones, expresaba su total desconfianza respecto a la naciente informática.[196] Se preguntaba si la informática no sería sinónimo de *espionaje* (*Spionatik*), o una rama secundaria de este, en clara alusión al trabajo de desciframiento de los mensajes alemanes al que Turing se había dedicado durante la guerra. Un caso más de la irracional, e involuntaria, eficacia de la matemática para el estudio de las ciencias naturales y artificiales, y un instrumento inesperado para contrastar la *hýbris* de los números que crecen desmesuradamente.

[195] Tomás de Aquino, *Summa Theologiae*, I, q. 4, a. 1: *Oportet enim ante id quod est in potentia, esse aliquid actu, cum ens in potentia non reducatur in actum, nisi per aliquod ens in actu*.

[196] R. J. Gillings, *Mathematics in the time of the pharaohs* (1972), Dover, Nueva York, 1982. Véase también S. Couchoud, *Mathématiques Egyptiennes*, Le Léopard d'Or, París, 1993.

METERESPACIO

El autor agradece especialmente a Giuseppe Trautteur y a Roberto Calasso sus valiosos consejos y sugerencias. A Maddalena Buri el atento análisis y cuidado de la redacción final. Y, por último, a Maria Carolina Foi, a Giancarlo Spallacci y a Carmine Di Fiore sus propuestas y comentarios.